48. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen bzw. Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

480821

Fritz und Laura spielen das folgende Würfelspiel:

Jeder Spieler erhält zwei übliche Spielwürfel und darf Würfe mit beiden Würfeln oder auch nur mit einem der beiden Würfel durchführen. Die gewürfelte Punktanzahlen werden addiert. Wem es zuerst gelingt, genau die Punktsumme 30 zu erreichen, der hat gewonnen. Wenn die Punktsumme 30 bei einem Wurf überschritten wird, dann beginnt der nächste Wurf wieder mit der Punktsumme 0.

a) Fritz hat zunächst immer mit beiden Würfeln gewürfelt und dabei 25 Punkte erreicht. Soll er beim nächsten Wurf wieder beide Würfel oder nur einen verwenden, um bei diesem Wurf die Punktsumme 30 zu erreichen? Begründe deinen Ratschlag.

b) Laura hat 22 Punkte erreicht.
Welche maximale Gewinnchance hat Laura, im nächsten Wurf die Punktsumme 30 zu erreichen?

480822

Katharina wird gefragt, wie viele Geschwister sie habe. Sie antwortet:

„Die Anzahl der zu unserer Familie gehörenden Kinder ist gleich dem ganzzahligen Lebensalter unseres Jüngsten. Der Altersunterschied zwischen den Geschwistern beträgt stets genau zwei Jahre. Addiert man die Zahlen, die das Lebensalter eines jeden Kindes angeben, so erhält man als Summe eine Zahl, die gleich dem neunfachen Lebensalter des Jüngsten ist. Nun könnt ihr errechnen, wie viele Kinder zu unserer Familie gehören und wie alt sie sind.“

Weise nach, dass diese Aufgabe genau eine Lösung hat, und gib Alter und Anzahl der Kinder an.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

480823

Wir betrachten ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$. Der Mittelpunkt der Seite $\overline{AD}$ sei mit E, der Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$ sei mit F bezeichnet.

a) Ermittle den Anteil des Flächeninhalts des Dreiecks EFD am Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$, wenn die Seite $\overline{AB}$ 6 cm lang, die Seite $\overline{CD}$ 4 cm lang ist und die Parallelen AB und CD einen Abstand von 5 cm haben.

b) Leite eine Formel her, die es gestattet, den Flächeninhalt des Dreiecks EFD allgemein aus der Länge a der Seite $\overline{AB}$, der Länge c der Seite $\overline{CD}$ und der Länge h der Höhe des Trapezes $ABCD$ zu berechnen.

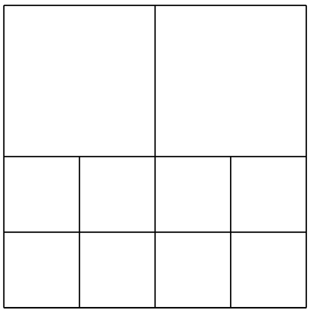
Hinweis: Natürlich ist es gestattet, zuerst den Teil b) zu lösen und dies für das Lösen von Teil a) zu nutzen.

480824

Ein Quadrat soll in n Teilquadrate zerlegt werden.

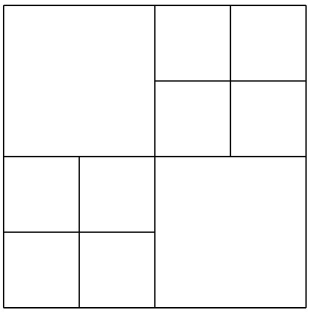
Die Abbildungen zeigen drei Zerlegungen eines Quadrats in 10 Teilquadrate. Bei diesen Zerlegungen treten verschieden große Teilquadrate auf. Daher kann man die Anzahl 10 jeweils als Summe von Zahlen darstellen, die die Anzahlen der verschieden großen Teilquadrate angeben. Beginnt man dabei mit der Anzahl der kleinsten Teilquadrate, dann erhält man die unter den Abbildungen angegebenen Summen.

Bei den ersten beiden Zerlegungen sind die auf diese Weise geordneten Summanden 8 und 2 gleich. Zwei Zerlegungen werden als gleich bezeichnet, wenn sie sich nur in der Anordnung der Teilquadrate, nicht aber in deren Anzahl oder Größe unterscheiden. Die dritte Zerlegung mit den geordneten Summanden 4, 3 und 3 ist daher von den ersten beiden Zerlegungen verschieden.



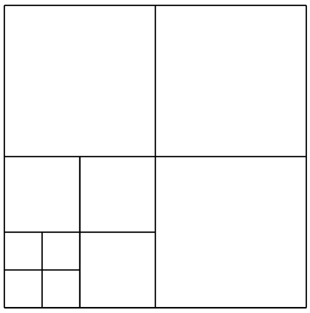
$10 = 8 + 2$

($A1$)



$10 = 8 + 2$

($A2$)



$10 = 4 + 3 + 3$

($A3$)

Abbildung A 480824

a) Gib eine Zerlegung eines Quadrats in 7 Teilquadrate sowie die zugehörigen geordneten Summanden an.

b) Gib drei verschiedene Zerlegungen eines Quadrats in 12 Teilquadrate sowie die zugehörigen geordneten Summanden an.

c) Die Zerlegung eines Quadrats in ($n =$) m^2 gleich große Teilquadrate nennen wir eine m^2-Zerlegung, wobei $m > 1$ gelten soll.
Beweise folgende Aussage: Von einer m^2-Zerlegung eines Quadrats ausgehend kann man stets eine Zerlegung dieses Quadrats in $2m$ Teilquadrate erzeugen.