

**48. Mathematik-Olympiade**  
**2. Stufe (Regionalrunde)**  
**Klasse 9**  
**Aufgaben**



© 2008 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*  
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

480921

Von einem  $n \times n$ -Schachbrett mit  $n \in \{3; 5; 7; 9\}$  wird das mittlere Feld entfernt.

Zeigen Sie für jede dieser Zahlen  $n$ , dass man die übrige Fläche in Teile der in Abb. A 480921 gezeigten Form aus vier Schachbrettfeldern zerlegen kann.



Abb. A 480921

480922

Eine Schulklasse hat in der ersten Stunde Mathematikunterricht. Nicht alle der 33 Schüler sind anwesend. Die Lehrerin lässt die Schüler in vier Gruppen arbeiten, wobei in jeder der Gruppen die gleiche Anzahl von Mädchen ist. Über die Anzahl der Jungen in jeder Gruppe ist nichts bekannt, insbesondere müssen die Gruppen nicht gleich groß sein.

Nach der Stunde fühlt sich ein Mädchen nicht wohl und geht nach Hause. Es folgt eine Deutschstunde, in welcher der Lehrer die Schüler in drei Gruppen einteilt. Diese Gruppen haben einen Mädchenanteil von 75 %, 60 % bzw. 30 %.

Wie viele Mädchen waren in der Mathematikstunde anwesend?

Begründen Sie Ihre Antwort!

480923

- a) Bestimmen Sie alle ganzzahligen Paare  $(a, b)$ , für die  $a + b \geq a^2 + b^2 - 1$  gilt.
- b) Zeigen Sie, dass für beliebige Paare  $(a, b)$  reeller Zahlen stets  $a + b \leq a^2 + b^2 + \frac{1}{2}$  gilt.
- c) Wann gilt in b) das Gleichheitszeichen?

480924

Es sei  $ABCD$  ein Quadrat mit der Seitenlänge  $a$ ,  $Q$  der Mittelpunkt der Seite  $\overline{CD}$  und  $P$  ein Punkt auf der Seite  $\overline{BC}$  derart, dass  $|\sphericalangle PAQ| = |\sphericalangle QAD|$  gilt.

- a) Bestimmen Sie den Abstand des Punkts  $Q$  von der Geraden  $AP$  in Abhängigkeit von der Länge  $a$  der Quadratseite.
- b) Beweisen Sie, dass  $|\sphericalangle AQP| = 90^\circ$  gilt.