48. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 12–13
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

481321

Man bestimme alle reellen Lösungen des Gleichungssystems

$$x^2 - 2y + 1 = 0$$
$$y^2 - 2z + 1 = 0$$
$$z^2 - 2x + 1 = 0.$$

481322

Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$. Der Punkt E liege auf der Seite $\overline{BC}$ und der Punkt F auf der Seite $\overline{CD}$. Es sei k der Kreis mit dem Mittelpunkt A und dem Radius $|AB|$. Siehe auch nebenstehende Abbildung.

a) Man beweise: Wenn $\overline{EF}$ den Kreis k berührt, dann ist $|\sphericalangle EAF| = 45°$.

b) Man beweise: Gilt $|\sphericalangle EAF| = 45°$, dann berührt $\overline{EF}$ den Kreis k.

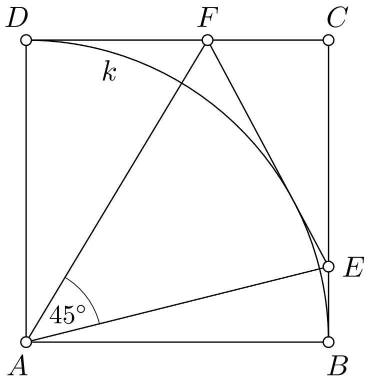

Abbildung A 481322

481323

Ein Dreieck habe ganzzahlige Seitenlängen a, b, c. Jede dieser Zahlen sei Teiler des Dreiecksumfangs u. Man beweise, dass dann das Dreieck gleichseitig ist.

481324

Es seien a_1 und a_2 positive reelle Zahlen. Man ermittle in Abhängigkeit von a_1 und a_2 alle positiven reellen Zahlen x, die die Ungleichung

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{a_1 + a_2 - x} < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}$$

erfüllen.