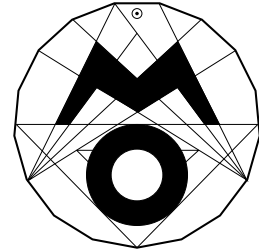


**48. Mathematik-Olympiade**  
**3. Stufe (Landesrunde)**  
**Klasse 9**  
**Aufgaben – 2. Tag**

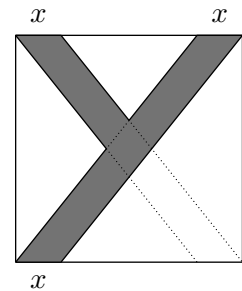


© 2008 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*  
 www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

480934

In ein Quadrat der Seitenlänge 10 cm ist der Buchstabe Y mit Parallelstreifen gemäß (nicht maßstabgerechter) Skizze eingezeichnet. Die Parallelstreifen schneiden dabei aus zwei einander gegenüberliegenden Quadratseiten insgesamt drei Strecken der Länge  $x = 3,7$  cm aus.



Untersuchen Sie, ob der Buchstabe Y mehr als, weniger als oder genau die Hälfte des Inhalts der Quadratfläche einnimmt.

480935

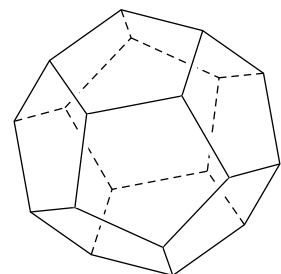
Zeigen Sie, dass für alle nichtnegativen reellen Zahlen  $a, b, c$  mit  $a + b + c = 1$  stets

$$\frac{1}{3} \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 1$$

gilt.

480936

Ein Dodekaeder (genauer: Pentagondodekaeder) ist ein Polyeder, dessen Seitenflächen regelmäßige Fünfecke sind, von denen in jeder Ecke drei zusammenstoßen (siehe Skizze). Ein Dodekaeder hat 12 Seitenflächen, 30 Kanten und 20 Ecken.



Man bestimme alle natürlichen Zahlen  $n$ , für die es möglich ist, die Ecken eines Dodekaeders so mit den Zahlen  $1, 2, \dots, n$  zu beschriften, dass folgende Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind:

- (1) An jeder Ecke steht genau eine der Zahlen  $1, 2, \dots, n$ .
- (2) Jede der Zahlen  $1, 2, \dots, n$  kommt gleich oft vor.
- (3) Für jede Seitenfläche ist die Summe der Zahlen an ihren Ecken dieselbe.