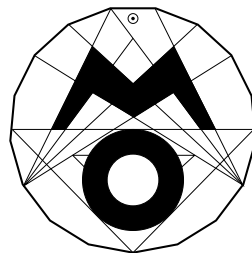


48. Mathematik-Olympiade  
3. Stufe (Landesrunde)  
Klasse 12–13  
Aufgaben – 2. Tag



© 2008 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*  
[www.mathematik-olympiaden.de](http://www.mathematik-olympiaden.de). Alle Rechte vorbehalten.

*Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

481334

Man beweise, dass für alle positiven reellen Zahlen  $a$  und  $b$  mit  $ab \leq 1$  die Ungleichung

$$\frac{a}{b} + \frac{1}{a} \geq a + 1 \tag{1}$$

gilt.

481335

Gegeben seien ein Dreieck  $ABC$  und ein innerer Punkt  $P$  der Seite  $\overline{AB}$ . Eine Gerade durch  $P$  zerlege das Dreieck in zwei flächengleiche Teile. Der zweite Schnittpunkt der Geraden mit einer Dreiecksseite sei  $Q$ . Man beweise: Die Parallele zu  $\overline{PC}$  durch  $Q$  halbiert  $\overline{AB}$ .

481336

Christian denkt sich eine gewisse positive ganze Zahl  $n$ , berechnet die Potenzen  $4^n$  und  $5^n$  und stellt fest, dass sie im Dezimalsystem geschrieben mit derselben Ziffer beginnen. Man beweise, dass diese gemeinsame Ziffer entweder eine 2 oder eine 4 sein muss.