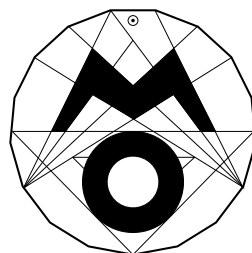


48. Mathematik-Olympiade  
4. Stufe (Bundesrunde)  
Klasse 9  
Aufgaben – 1. Tag



© 2009 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*  
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

*Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

480941

Anton und Bärbel spielen folgendes Spiel: Von einem Stapel mit 100 Karten ziehen sie abwechselnd entweder 2, 5 oder 6 Karten. Den ersten Zug führt stets Anton aus. Gewonnen hat, wer den letzten erlaubten Zug machen kann.

Untersuchen Sie, wer von beiden den Sieg erzwingen kann, und geben Sie eine Gewinnstrategie an.

480942

Es sei  $ABCD$  ein beliebiges, nicht notwendig regelmäßiges Tetraeder mit Volumen 1. Es bezeichnen  $S_A$ ,  $S_B$ ,  $S_C$  und  $S_D$  in dieser Reihenfolge die Schwerpunkte seiner dreieckigen Seitenflächen  $BCD$ ,  $ACD$ ,  $ABD$  bzw.  $ABC$ .

Welche Werte kann das Volumen des Tetraeders  $S_A S_B S_C S_D$  annehmen?

480943

Bestimmen Sie alle Paare  $(x, y)$  reeller Zahlen, die den folgenden drei Bedingungen genügen:

- (1)  $(1 + x^3)(1 + y^3) = 1$ ,
- (2)  $\sqrt[3]{|(1 + x)(1 + y)|}$  ist rational,
- (3)  $\sqrt[3]{|xy(x + y)|}$  ist rational.