**48. Mathematik-Olympiade**
**4. Stufe (Bundesrunde)**
**Klasse 9**
**Aufgaben – 2. Tag**



Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

480944

Es sei $C$ ein Punkt der Strecke $\overline{AB}$. Über $\overline{AB}$ und $\overline{CB}$ seien die Halbkreise $h_1$ bzw. $h_2$ zur selben Seite hin errichtet. Der Kreis $k_3$ berühre $h_1$ von innen, $h_2$ von außen und weiterhin die Strecke $\overline{AB}$.

Wenn die Radien von $h_2$ und $k_3$ beide 3 cm groß sind, wie groß ist dann der Radius von $h_1$?

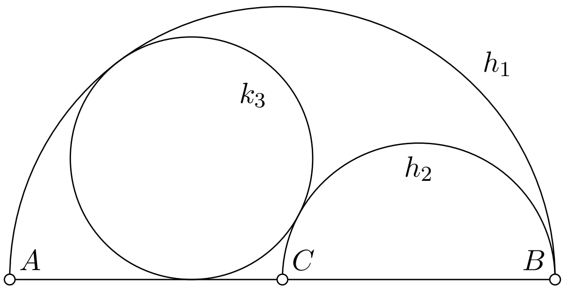


Abbildung A 480944

480945

Die Zifferndarstellung der positiven ganzen Zahl $z$ im Zehnersystem sei

$$z = [z_{n-1}z_{n-2}\ldots z_0]$$

mit den Ziffern $z_{n-1}, z_{n-2}, \ldots, z_1, z_0$. Für jede solche Zahl $z$ wird ein Wert $S(z)$ durch Addition der siebenten Potenzen dieser Ziffern, also nach der folgenden Vorschrift berechnet:

$$S(z) = S([z_{n-1}z_{n-2}\ldots z_0]) = z_{n-1}^7 + z_{n-2}^7 + \cdots + z_0^7.$$

Es gibt Zahlen $z$, für welche $S(z) = z$ gilt, zum Beispiel $z = 1\,741\,725$, denn es ist

$$1^7 + 7^7 + 4^7 + 1^7 + 7^7 + 2^7 + 5^7 = 1\,741\,725.$$

Untersuchen Sie, ob es endlich oder ob es unendlich viele positive ganze Zahlen $z$ mit $S(z) = z$ gibt.

480946

Gegeben ist eine natürliche Zahl $k$ mit $k > 0$.

Für eine natürliche Zahl $n$ mit $n > 1$ wird die Summe $S = S_k(n)$ von $n + 1$ unmittelbar aufeinander folgenden natürlichen Zahlen berechnet, deren kleinste gleich $k$ ist. Diese Summe wird auf Teilbarkeit durch $n$ untersucht.

a) Zunächst wird $k = 2009$ gewählt. Für wie viele Zahlen $n$ ist $S_{2009}(n)$ durch $n$ teilbar?
b) Das Problem ist im Allgemeinen für natürliche Zahlen $k$ und $n$ mit $k > 0$ und $n > 1$ zu lösen: Für welche Zahlen $n$ ist bei gegebener Zahl $k$ die Summe $S_k(n)$ durch $n$ teilbar?
c) Für welche $k$ gibt es genau eine natürliche Zahl $n$, so dass die Summe $S_k(n)$ durch $n$ teilbar ist?