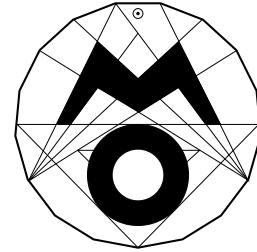


**48. Mathematik-Olympiade**  
**4. Stufe (Bundesrunde)**  
**Klasse 10**  
**Aufgaben – 2. Tag**



© 2009 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*  
 www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

481044

Es sei  $C$  ein Punkt der Strecke  $\overline{AB}$ . Über  $\overline{AB}$  und  $\overline{CB}$  seien die Halbkreise  $h_1$  bzw.  $h_2$  zur selben Seite hin errichtet. Der Kreis  $k_3$  berühre  $h_1$  von innen,  $h_2$  von außen und weiterhin die Strecke  $\overline{AB}$ .

Wenn die Radien von  $h_2$  und  $k_3$  beide 3 cm groß sind, wie groß ist dann der Radius von  $h_1$ ?

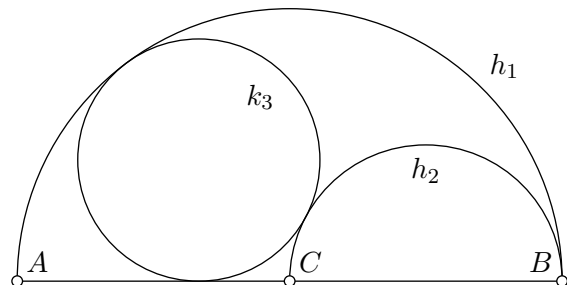


Abbildung A 481044

481045

Wir betrachten die natürlichen Zahlen in ihrer üblichen Darstellung im Zehnersystem ohne überflüssige führende Nullen. Dadurch ist die Zifferndarstellung und damit auch die Anzahl der Ziffern einer Zahl eindeutig bestimmt.

Als *Gewicht*  $g(n)$  einer natürlichen Zahl  $n$  mit  $d$  Ziffern bezeichnen wir die Zahl  $\frac{1}{10^d}$ . Natürlich sind die kleinen Zahlen am gewichtigsten: So ist beispielsweise  $g(0) = 0,1$  und  $g(40\,270) = 0,00001$ .

Das Gesamtgewicht  $G(M)$  einer beliebigen Menge  $M$  von natürlichen Zahlen sei die Summe der Gewichte aller Elemente von  $M$ .

Es sei nun eine  $M$  eine nichtleere, endliche Menge natürlicher Zahlen, von denen keine auf eine andere Zahl der Menge endet. Wenn also beispielsweise 48 070 in  $M$  vorkommt, so dürfen 0, 70 und 8070 nicht zu  $M$  gehören. (070 kann ohnehin nicht zu  $M$  gehören, weil es nach der obigen Festlegung keine natürliche Zahl ist.) Eine solche Menge nennen wir wiederholungsfrei.

Zeigen Sie, dass das Gesamtgewicht einer solchen wiederholungsfreien Menge  $M$  nicht größer als 1 sein kann.

481046

Jede der Zahlen  $1, 2, \dots, 46$  wird mit genau einer der Farben rot, gelb und blau gefärbt. Man zeige, dass es zwei verschiedene, gleichfarbige Zahlen  $x, y$  gibt, deren positive Differenz  $|x - y|$  eine Quadratzahl ist.