48. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 11
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

481144

Es seien a und b zwei feste positive reelle Zahlen.

Man bestimme alle reellen Zahlen x, die der Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{a+b-x}} < \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$$

genügen.

481145

Einem Dreieck ABC ist ein Halbkreis so einbeschrieben, dass der Durchmesser $\overline{EF}$ des Halbkreises auf der Seite $\overline{AB}$ liegt. Dabei befindet sich E zwischen F und A, der Halbkreis berührt die Dreiecksseiten $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ in den Punkten G beziehungsweise H.

Man beweise, dass der Schnittpunkt der Geraden EH und FG auf der Geraden liegt, die durch den Punkt C geht und auf der Geraden AB senkrecht steht.

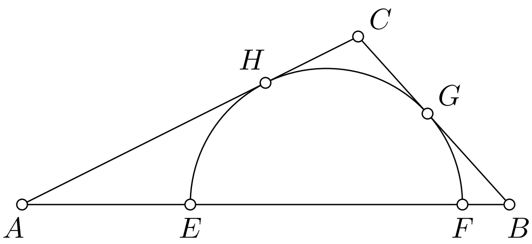

Abbildung A 481145

481146

Eine Zahlenfolge $x_0, x_1, x_2, \dots$ sei durch ihren Startwert x_0 mit $0 \le x_0 \le 1$ und die rekursive Vorschrift

$$x_{n+1} = \tfrac{3}{4} - \tfrac{3}{2}\left|x_n - \tfrac{1}{2}\right|, \quad n = 0, 1, \dots$$

gegeben.

Weiterhin sei $I = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall mit der folgenden Eigenschaft: Zu jeder Wahl des Startwertes x_0 existiert eine positive ganze Zahl n, für die von x_n ab alle weiteren Folgenglieder in I liegen.

Man beweise, dass $\frac{7}{11} \in I$.