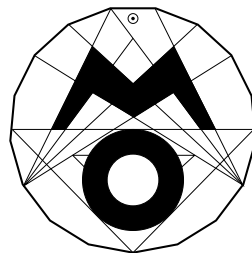


48. Mathematik-Olympiade  
4. Stufe (Bundesrunde)  
Klasse 12–13  
Aufgaben – 1. Tag



© 2009 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*  
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

*Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

481341

Man untersuche, für welche nichtnegativen reellen Zahlen  $a$  die Gleichung

$$\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} = a \tag{1}$$

mindestens eine reelle Lösung  $x$  mit  $0 \leq x \leq 1$  besitzt.

Für jedes solche  $a$  gebe man alle derartigen Lösungen  $x$  an.

481342

Man ermittle alle positiven ganzen Zahlen  $n$ , für die  $n^3 - 5n^2 + 9n - 6$  eine Quadratzahl ist.

481343

Es sei  $ABCD$  ein Tangentenviereck, dessen Diagonalen  $\overline{AC}$  und  $\overline{BD}$  sich im Punkt  $N$  schneiden. Weiter seien  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  die Längen der aus  $N$  auf  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  bzw.  $DA$  gefällten Lote.

Man beweise, dass

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}$$

gilt.