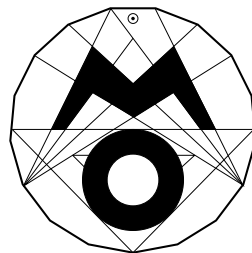


48. Mathematik-Olympiade  
4. Stufe (Bundesrunde)  
Klasse 12–13  
Aufgaben – 2. Tag



© 2009 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*  
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

481344

Es seien  $a$  und  $b$  zwei feste positive reelle Zahlen.

Man bestimme alle reellen Zahlen  $x$ , die der Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{a+b-x}} < \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$$

genügen.

481345

Einem Dreieck  $ABC$  ist ein Halbkreis so einbeschrieben, dass der Durchmesser  $\overline{EF}$  des Halbkreises auf der Seite  $\overline{AB}$  liegt. Dabei befindet sich  $E$  zwischen  $F$  und  $A$ . Der Halbkreis berührt die Dreiecksseiten  $\overline{BC}$  und  $\overline{AC}$  in den Punkten  $G$  beziehungsweise  $H$ . Es sei  $S$  der Schnittpunkt der Geraden  $HF$  und  $GE$  und ebenso  $T$  der Schnittpunkt der Geraden  $HE$  und  $FG$ .

Man beweise, dass  $C$  der Mittelpunkt der Strecke  $\overline{ST}$  ist.

481346

Eine Zahlenfolge  $x_0, x_1, x_2, \dots$  sei durch ihren Startwert  $x_0$  mit  $0 \leq x_0 \leq 1$  und die rekursive Vorschrift

$$x_{n+1} = \frac{5}{6} - \frac{4}{3} \left| x_n - \frac{1}{2} \right|, \quad n = 0, 1, \dots$$

gegeben.

Man ermittle das kleinste abgeschlossene Intervall  $[a, b]$  mit der Eigenschaft, dass für jeden Startwert  $x_0$  das Folgenglied  $x_{2009}$  in  $[a, b]$  liegt.