48. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 12–13
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

481344

Es seien a und b zwei feste positive reelle Zahlen.

Man bestimme alle reellen Zahlen x, die der Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{a+b-x}} < \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$$

genügen.

481345

Einem Dreieck ABC ist ein Halbkreis so einbeschrieben, dass der Durchmesser $\overline{EF}$ des Halbkreises auf der Seite $\overline{AB}$ liegt. Dabei befindet sich E zwischen F und A. Der Halbkreis berührt die Dreiecksseiten $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ in den Punkten G beziehungsweise H. Es sei S der Schnittpunkt der Geraden HF und GE und ebenso T der Schnittpunkt der Geraden HE und FG.

Man beweise, dass C der Mittelpunkt der Strecke $\overline{ST}$ ist.

481346

Eine Zahlenfolge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ sei durch ihren Startwert x_0 mit $0 \leq x_0 \leq 1$ und die rekursive Vorschrift

$$x_{n+1} = \tfrac{5}{6} - \tfrac{4}{3}\left|x_n - \tfrac{1}{2}\right|, \quad n = 0, 1, \ldots$$

gegeben.

Man ermittle das kleinste abgeschlossene Intervall $[a, b]$ mit der Eigenschaft, dass für jeden Startwert x_0 das Folgenglied x_{2009} in $[a, b]$ liegt.