

49. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulstufe)
Klasse 6
Aufgaben



© 2009 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

490611

In dieser Aufgabe geht es um Kreise und Geraden, die einander schneiden oder auch nur berühren.

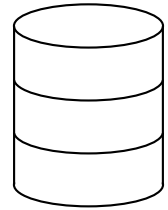
- a) Wir beginnen mit einem Kreis und zwei Geraden. Die Geraden sollen vier Schnittpunkte mit dem Kreis haben.
Fertige je eine Zeichnung für folgende drei Fälle an:
- Die Geraden schneiden einander nicht.
 - Die Geraden schneiden einander außerhalb des Kreises.
 - Die Geraden schneiden einander innerhalb des Kreises.
- b) Zeichne zwei parallele Geraden.
Zeichne einen Kreis so, dass er die eine Parallele berührt und die andere zweimal schneidet.
Zeichne nun einen zweiten Kreis in deine Zeichnung, der beide Parallelen berührt. Wo befindet sich der Mittelpunkt deines zweiten Kreises?
- c) Zeichne zwei Kreise, die einander in zwei Punkten schneiden.
Nun zeichnest du die Gerade durch die beiden Schnittpunkte; dann wählst du dir einen der beiden Schnittpunkte und zeichnest die senkrechte Gerade zu der ersten Gerade durch diesen Schnittpunkt.
Wie viele Schnittpunkte hat diese zweite Gerade mit den Kreisen?
- d) Zeichne zwei Kreise mit gemeinsamem Mittelpunkt. Der Radius des größeren soll doppelt so groß sein wie der Radius des kleineren Kreises. Zeichne dann ein Dreieck, dessen Eckpunkte auf dem großen Kreis liegen und dessen Seiten den kleinen Kreis berühren.
Was für ein Dreieck entsteht?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

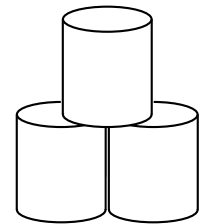
490612

Annabella feiert nächsten Monat ihren Geburtstag und hat über viele Wochen gleich große leere Konservendosen gesammelt. Die Dosen sind oben offen und haben keine Beschriftung mehr.

Damit die Dosen etwas schöner aussehen, möchte Annabella drei Streifen auf die Dosen malen und zwar so, dass der Boden und der daran grenzende unterste Streifen nicht die gleiche Farbe haben und nebeneinander liegende Streifen auch nicht. Natürlich sollen alle Streifen und auch der Boden bemalt werden.



- Annabella findet zu Hause nur die Farben Rot und Blau. Wie viele Dosen könnte sie unterschiedlich bemalen?
- Annabellas Mutter findet noch einen Topf mit gelber Farbe. Wie viele Dosen kann sie nun unterschiedlich bemalen, wobei aber nicht immer alle drei Farben verwendet werden müssen?
- Bisher sind alle Dosen zwei- oder dreifarbig. Der Nachbar bringt noch die Farbe grün vorbei, und Annabella kann weitere Dosen, und zwar immer vierfarbig, anmalen. Wie viele neue Dosen kann sie so bemalen? Die Lösung soll durch eine Rechnung gefunden werden.
- Annabella ist nun fertig und hat eine ganze Menge Dosen bemalt. Als sie ihre Dosen betrachtet, stellt sie fest: „Oh, jede Dose sieht anders aus, aber es gibt zweifarbige, dreifarbige und vierfarbige Dosen.“
Wie viele zweifarbige Dosen gibt es? Wie viele sind dreifarbig? Und wie viele vierfarbig?
- Annabella möchte aus ihren Dosen eine neunstufige Pyramide aufbauen. (Im nebenstehenden Bild ist eine zweistufige Pyramide dargestellt.)
Reicht die Anzahl ihrer Dosen, um diese Pyramide aufzubauen?



490613

Stelle dir Folgendes vor:

Du bist in einem Königreich der Minister, der für das Geld zuständig ist. Die Währung heißt Sol (Mehrzahl Soles, Zeichen S), und es gibt nur ganzzahlige Beträge.

An einem schönen Morgen lässt dich der König rufen und sagt: „Ich will in meinem Reich neue Münzen einführen. Da ich sparsam bin, werden wir nur Münzen zu 1 Sol, zu 3 Soles und zu 9 Soles prägen.“

Der König sprach's, du führtest's aus: Es gibt also nur Münzen für 1 S , für 3 S und für 9 S .

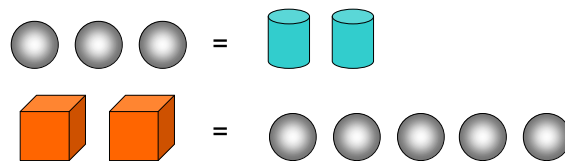
- Wie viele Münzen braucht man mindestens, um einen Preis von 17 S zu bezahlen? Und wie viele für einen Preis von 21 S ?
- Dein Diener soll auf den Markt gehen und neun verschiedene Dinge kaufen, die jeweils unterschiedlich viel kosten, und zwar alle möglichen Preise von 1 S bis 9 S . Jeder Händler auf dem Markt gibt das Wechselgeld mit der kleinstmöglichen Münzenzahl zurück. Du gibst deinem Diener fünf 9- S -Münzen mit und sagst ihm, er solle von höchstens vier Händlern Wechselgeld annehmen. Zeige, dass er unter diesen Bedingungen die neun Dinge kaufen kann.
Wie viele Münzen der drei Sorten hättest du deinem Diener mitgeben müssen, wenn kein Händler Wechselgeld zurückgeben würde?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

- c) Die Händler geben wieder Wechselgeld, und du schickst den Diener wieder los. Er soll wieder neun verschiedene Dinge mit jeweils unterschiedlichem Preis kaufen, aber diesmal von 2 ₰ bis 10 ₰ , und dabei nicht häufiger als viermal Wechselgeld annehmen. Der Diener erhält von dir also sechs 9- ₰ -Münzen. Kann er deinen Auftrag erfüllen?
- d) Dein Diener findet diese Aufgabe zu einfach. „Herr,“ sagt er, „ich möchte 16 verschiedene Dinge von 1 ₰ bis 16 ₰ einkaufen. Ihr gebt mir die kleinstmögliche Zahl Münzen für den Gesamtpreis mit, und ich versuche, unter den Bedingungen auf dem Markt alles zu bekommen.“
Wie viele – und welche – Münzen musst du dem Diener mitgeben? Kann er seine Aufgabe lösen?

490614

Gezeichnete Gleichungen:



Drei Kugeln sind so schwer wie zwei Zylinder. Zwei Würfel sind so schwer wie fünf Kugeln. Wie viele Zylinder sind so schwer wie drei Würfel?

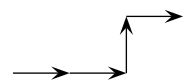
490615

Wenn man einen Roboter (oder einen Zeichenstift) auf einem quadratischen Kästchengitter bewegen will, so kann man dies durch eine Folge von drei Grundkommandos machen:

- G – ändere deine Richtung nicht und gehe eine Kantenlänge.
- L – drehe dich nach links um 90° und gehe eine Kantenlänge.
- R – drehe dich nach rechts um 90° und gehe eine Kantenlänge.

Grundsätzlich soll am Anfang der Roboter mit „dem Gesicht nach rechts“ stehen. Wenn er also von dort nach oben laufen soll, lautet das erste Kommando „L“, wenn er von dort nach rechts laufen soll, lautet das erste Kommando „G“, wenn er vom Anfang nach unten laufen soll, lautet das erste Kommando „R“.

Beispiel: Zu der nebenstehenden Figur gehört die Kommandofolge GGLR.



- a) Gib eine Kommandofolge an, die den Roboter *insgesamt* um 4 Schritte nach rechts und drei Schritte nach oben führt und aus 9 Grundkommandos besteht. Zeichne die zugehörige Figur.
- b) Gib eine Kommandofolge mit kleinstmöglicher Länge an, die ein Quadrat mit der Kantenlänge 3 erzeugt und bei einem zweiten Durchlauf wiederum dieses Quadrat malt.
- c) Wir geben eine Kommandofolge vor: (1) LLRRRLLLL
Zeichne auf kariertem Papier die Figur, die entsteht, wenn die Kommandofolge viermal hintereinander durchgeführt wird.
- d) Ändere das erste Kommando von (1) aus Teil c) in R. Welche Figur entsteht jetzt, wenn du mehrere Durchläufe machst? Nach wie vielen Durchläufen könnte der Roboter aufhören, weil sich die Figur wiederholt?
- e) Ändere das erste Kommando von (1) aus Teil c) in G. Welche Figur entsteht jetzt, wenn du mehrere Durchläufe machst? Erreicht der Roboter immer noch seinen Ausgangspunkt und würde die Figur noch einmal zeichnen?