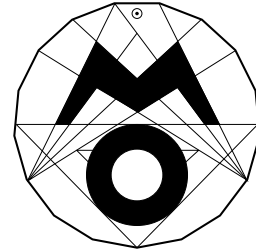


**49. Mathematik-Olympiade**  
**1. Stufe (Schulstufe)**  
**Klasse 11–13**  
**Aufgaben**



© 2009 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*  
[www.mathematik-olympiaden.de](http://www.mathematik-olympiaden.de). Alle Rechte vorbehalten.

*Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

491311

Man ermittle für jede reelle Zahl  $a$  alle reellen Zahlen  $x$ , die die Ungleichung

$$||x - 1| + x - 3| < a$$

erfüllen.

491312

Der Inkreis des Dreiecks  $ABC$  berühre dessen Seiten  $\overline{AB}$  und  $\overline{AC}$  in  $E$  und  $F$ . Der Umkreis des Dreiecks  $BFE$  schneide die Gerade  $AC$  außer in  $F$  noch in  $M$ , und analog bezeichne  $N$  den von  $E$  verschiedenen Schnittpunkt des Umkreises von Dreieck  $CFE$  mit der Geraden  $AB$ . Man beweise, dass die Gerade  $MN$  den Inkreis des Dreiecks  $ABC$  berührt.

491313

Ulrike und Veit spielen mit Kieseln. Dazu füllen sie zwei Schalen mit jeweils der gleichen Anzahl  $n > 1$  von Kieselsteinen und wechseln sich in den Zügen ab. Ulrike beginnt.

Derjenige Spieler, der am Zug ist, leert eine beliebige Schale und teilt den Inhalt der anderen Schale auf beide so auf, dass keine Schale leer bleibt. Wer keinen Zug mehr ausführen kann, hat verloren, und das Spiel ist beendet.

Man untersuche, ob Ulrike oder ob Veit die Möglichkeit hat, den Sieg zu erzwingen. Man gebe eine Spielweise an, mit der dies möglich ist.

491314

In den Mittelpunkten der Seitenflächen eines Würfels mit der Kantenlänge  $a$  werden nach außen weisende senkrechte Strecken der Länge  $h$  errichtet. Die sechs nicht auf der Oberfläche des Würfels liegenden Endpunkte dieser Strecken bilden die Ecken eines durch acht gleichseitige Dreiecke begrenzten Körpers, eines sogenannten Oktaeders.

- a) Wie groß ist  $h$ , wenn das Oktaeder die Kantenlänge  $2a$  hat?
- b) Man untersuche, ob in diesem Fall der Würfel ganz im Inneren des Oktaeders liegt.