49. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 5
Aufgaben

© 2010 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
`www.mathematik-olympiaden.de`. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

490531

In dieser Aufgabe geht es um Kreise und Geraden, die sich schneiden oder auch nur berühren, also gemeinsame Punkte aufweisen.

a) Wir beginnen mit zwei gleich großen Kreisen und zwei Geraden. Die Kreise sollen sich berühren. Die Geraden sollen vier verschiedene gemeinsame Punkte mit den zwei Kreisen haben. Jeder Kreis muss mindestens einen dieser gemeinsamen Punkte haben.
Zeichne je zwei Geraden so, dass
   (1) sie sich selbst nicht schneiden,
   (2) sie sich außerhalb der Kreise schneiden,
   (3) sie sich schneiden, aber nicht außerhalb der Kreise.

b) Es geht weiter mit zwei Parallelen im Abstand von 4 cm. Nun sollen nacheinander drei Kreise gezeichnet werden, die sich nicht schneiden oder berühren.
   (1) Zeichne den ersten Kreis so, dass er beide Parallelen jeweils zweimal schneidet.
   (2) Zeichne den zweiten Kreis so, dass er eine Parallele berührt und die andere Parallele zweimal schneidet.
   (3) Zeichne den dritten Kreis so, dass er beide Parallelen berührt.

c) Zeige in einem Beispiel, dass genau zwei der Kreise aus Aufgabe b) denselben Radius haben können.

490532

Carl und Manuel gehen gemeinsam zu „Großspur“. Carl kauft 3 Flaschen Apfelsaft, 5 Flaschen Orangensaft und 4 Flaschen Mineralwasser. Er zahlt dafür 7,50 €.

Manuel stellt fest, dass eine Flasche Apfelsaft 10 Cent mehr kostet als eine Flasche Orangensaft. Carl stellt fest, dass er für eine Flasche Apfelsaft zwei Flaschen Mineralwasser kaufen könnte.

a) Wie teuer waren die einzelnen Getränke pro Flasche? Mache eine Probe!

b) Im benachbarten Supermarkt „Lottl“ kostet der Apfelsaft 60 Cent pro Flasche, der Orangensaft 70 Cent pro Flasche und das Mineralwasser 40 Cent pro Flasche. Wenn man 7,50 € bei „Lottl“ ausgeben will, genau zwei Flaschen Mineralwasser und darüber hinaus nur Apfelsaft und Orangensaft kauft und auf jeden Fall Apfelsaft *und* Orangensaft braucht – welche Möglichkeiten gibt es dann für den Einkauf bei „Lottl“?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

490533

Markus und Tobias gehen beide in die gleiche Grundschulklasse. Sie betrachten ihren neuen Stundenplan und denken über Möglichkeiten nach, für die Unterrichtsstunden eines Tages eine andere Reihenfolge zu finden.

Montag	*Dienstag*	*Mittwoch*	*Donnerstag*	*Freitag*
Sachkunde	Deutsch	Sport	Deutsch	Religion
Sachkunde	Musik	Mathematik	Deutsch	Mathematik
Mathematik	Sport	Religion	Musik	Mathematik
Deutsch	Mathematik	Sachkunde	Sport	Musik

a) Markus meint: „Eine Doppelstunde Sachkunde ist o. k. und soll so bleiben.“ Wie viele Möglichkeiten gibt es dann, den Montagsplan zu gestalten?

b) Markus meint: „Mathematik am Dienstag darf nicht in der letzten Stunde sein. Das ist so anstrengend.“ Wie viele Verteilungen für diesen Tag sind möglich, wenn Mathematik nicht in der letzten Stunde liegen soll?

c) Tobias sieht, dass es am Mittwoch alles Einzelstunden sind. Er hätte auch nichts gegen Mathematik in der letzten Stunde und sagt deswegen zu Markus: „O je, sind das viele Möglichkeiten.“ Wie viele mögliche Stundenverteilungen gibt es für den Mittwoch?

d) Tobias untersucht den Donnerstag. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Verteilung, wenn die Deutschstunden nicht hintereinanderliegen sollen?

e) Am Freitag schließlich, so meint Markus, sollte die Doppelstunde Mathematik bleiben, aber sie sollte nicht von der großen Pause nach der zweiten Stunde unterbrochen werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es dann für den Freitagsplan?

490534

a) Maximilian hat sich genauer mit Quadratzahlen befasst und behauptet, dass sich jede Zahl als Summe von höchstens vier Quadratzahlen schreiben lässt. Zum Beispiel

$$21 = 4^2 + 2^2 + 1^2; \qquad 120 = 10^2 + 4^2 + 2^2; \qquad 249 = 15^2 + 4^2 + 2^2 + 2^2.$$

Seine Mitschülerin Paulina glaubt das nicht. Er schließt mit Paulina eine Wette ab: „Wetten, dass ich dir alle Zahlen von 50 bis 60 als Summe von höchstens vier Quadratzahlen schreiben kann?“ Hilf Maximilian die Wette zu gewinnen.

b) Paulina weiß, dass man ungerade Zahlen als Differenz von zwei Quadratzahlen darstellen kann, zum Beispiel $5 = 3^2 - 2^2$ oder $9 = 5^2 - 4^2$. Maximilian will nun zeigen, dass er das auch kann und schreibt die Zahlen 11, 13, 17, 19, 21 und 23 jeweils als Differenzen von zwei Quadratzahlen. Welche Regelmäßigkeit ist hier bei diesen Zahlen zu erkennen?

c) „Gibt es auch gerade Zahlen, die sich als Differenz von nur zwei Quadratzahlen schreiben lassen?“ fragt Maximilian. Gib zwei gerade Zahlen an, die sich als Differenz zweier Quadratzahlen schreiben lassen.

d) Paulina wird neugierig: „Gibt es auch Quadratzahlen, die sich als Differenz zweier anderer Quadratzahlen schreiben lassen?“ „Bestimmt, wir suchen mal“, antwortet Maximilian und beide Kinder finden schnell je eine andere solche Quadratzahl. Gib zwei solcher Quadratzahlen an.