49. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 8
Aufgaben – 2. Tag

© 2010 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
`www.mathematik-olympiaden.de`. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

490834

Eine Jugendherberge hat 12 Übernachtungsräume mit Betten für insgesamt 41 Schülerinnen und Schüler, und zwar ausschließlich Dreibett-, Vierbett- und Fünfbettzimmer. Außerdem ist bekannt: Die meisten Zimmer sind Dreibettzimmer und es gibt mehr als ein Vierbettzimmer.

a) Weise nach: Aus diesen Angaben lässt sich die Anzahl der Dreibett-, der Vierbett- und der Fünfbettzimmer eindeutig ableiten.

b) Eine Gruppe von 17 Jungen und 24 Mädchen soll auf die 12 Übernachtungsräume so aufgeteilt werden, dass Jungen und Mädchen in verschiedenen Räumen untergebracht sind.

   Ermittle alle Möglichkeiten, die Gruppe in der gewünschten Weise aufzuteilen.

490835

Gegeben ist ein regelmäßiges Fünfeck $ABCDE$. Der Schnittpunkt der Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{EB}$ ist mit F bezeichnet. Der Kreis mit dem Mittelpunkt B und dem Radius $\overline{AB}$ schneidet die Gerade AE außer in A noch im Punkt G. Der Kreis mit dem Mittelpunkt A und dem Radius $\overline{AB}$ schneidet die Gerade CB außer in B noch im Punkt H.

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen auch das Fünfeck $AGHBF$ regelmäßig ist.

490836

Die Kanten eines Würfels werden mit den natürlichen Zahlen von 1 bis 12 durchnummeriert. Dann wird für jede Ecke die Summe der drei Zahlen ermittelt, die auf den von ihr ausgehenden Kanten stehen.

a) Beweise, dass es keine Nummerierung gibt, bei der diese acht Eckensummen alle gleich groß sind.

b) Ermittle alle natürlichen Zahlen von 1 bis 12 mit folgender Eigenschaft: Ersetzt man nur diese Zahl durch 13, so gibt es eine Nummerierung der Kanten eines Würfels mit diesen zwölf Zahlen derart, dass alle acht Eckensummen gleich groß sind.

   Zum Nachweis, dass diese Zahlen tatsächlich die geforderte Eigenschaft haben, genügt jeweils die Angabe einer entsprechenden Nummerierung. Eine Herleitung der Nummerierungen wird nicht verlangt.