49. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 9
Aufgaben – 1. Tag

© 2010 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
`www.mathematik-olympiaden.de`. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

490931

Es sei $n = 10m + 1$ mit einer ungeraden natürlichen Zahl m.

Zeigen Sie, dass dann $n^5 - 51$ durch 100 teilbar ist.

490932

Auf einer Zugstrecke liegen die Bahnhöfe A, B, C, D und E in dieser Reihenfolge. Zeitgleich fahren in C um 9:00 Uhr eine Regionalbahn mit 25 km/h nach A und ein Regionalexpress mit 40 km/h nach E los. Als die Regionalbahn in B ist, fahren von dort ein ICE mit 100 km/h nach E und ein Güterzug nach C ab. Als der Regionalexpress in D ist, fahren von dort ein IC mit 62,5 km/h nach A und ein Güterzug nach C ab. Alle Züge erreichen gleichzeitig um 21:30 Uhr ihr Ziel.

a) Man zeige, dass sich der ICE und der IC in C begegnen.
b) Man zeige, dass die beiden Güterzüge gleich schnell sind.

Hinweis: Es wird für diese Aufgabe angenommen, dass die Züge auf den jeweiligen Strecken mit konstanter Geschwindigkeit fahren.

490933

Bestimmen Sie die kleinste reelle Zahl k, für die Folgendes gilt:

Das Volumen eines jeden Tetraeders, dessen Eckpunkte auf der Oberfläche eines regelmäßigen Oktaeders liegen, nimmt nicht mehr als k Prozent des Oktaedervolumens ein.

Hinweis: Ein Tetraeder, dessen Grundfläche den Inhalt F und dessen Höhe die Länge h hat, besitzt das Volumen $\frac{1}{3}hF$.