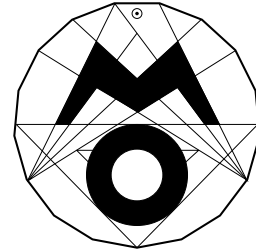


49. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 8
Aufgaben – 2. Tag



© 2010 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

490844

Es sei $ABCD$ ein Quadrat und k der Kreis um den Mittelpunkt A durch den Punkt B . Von einem Punkt P wird gefordert, dass er im Inneren dieses Quadrates und auf dem Kreis k liegt. Durch P sei die Tangente t an k gelegt. Der Fußpunkt des Lotes von B auf t sei mit E und der Fußpunkt des Lotes von D auf t sei mit F bezeichnet.

Beweise: Die Summe der Streckenlängen $|DF|$, $|FE|$ und $|EB|$ ist gleich dem halben Umfang des Quadrats $ABCD$.

490845

Wir haben 4 Schalen mit je 4 Kugeln: eine rote Schale mit 4 roten Kugeln, eine blaue Schale mit 4 blauen Kugeln, eine grüne mit 4 grünen Kugeln und eine weiße mit 4 weißen Kugeln. Wir schütten alle Schalen aus, mischen die 16 Kugeln und verteilen sie wieder gleichmäßig auf die 4 Schalen, d. h. in jede Schale 4 Kugeln.

- a) Nimm an, dass nach dem Verteilen in der roten und in der blauen Schale zusammen mindestens fünf Kugeln rot oder blau sind.

Beweise: Unter dieser Bedingung ist es möglich, aus jeder Schale genau eine Kugel so herauszunehmen, dass alle diese 4 Kugeln paarweise verschiedene Farben haben.

- b) Beweise: Nach jeder beliebigen Umverteilung der Kugeln ist es möglich, aus jeder Schale genau eine Kugel so herauszunehmen, dass alle diese 4 Kugeln paarweise verschieden gefärbt sind.

490846

Herr und Frau Kinderreich haben nur Töchter. Das Durchschnittsalter der Töchter ist ganzzahlig. Die älteste Tochter ist doppelt so alt wie das Durchschnittsalter aller Töchter. Das Alter der jüngsten Tochter ist zwei Drittel des Durchschnittsalters aller Töchter. Alle Töchter sind verschieden alt und die Älteste ist jünger als 33 Jahre.

- a) Beweise, dass die Anzahl der Töchter durch diese Angaben nicht eindeutig bestimmt ist.
b) Beweise, dass es außer den von dir gefundenen Anzahlen keine weiteren Möglichkeiten gibt.

Hinweis: Das Alter der Töchter ist in dieser Aufgabe ganzzahlig. Zwei Töchter sind verschieden alt, wenn ihr ganzzahliges Alter verschieden ist.