49. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 9
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

490944

Bestimmen Sie alle Paare $(a; b)$ positiver ganzer Zahlen mit $a < b$, für welche die quadratischen Terme $x^2 + ax + b$ und $x^2 + bx + a$ beide als Produkte linearer Terme mit ganzzahligen Koeffizienten geschrieben werden können.

Hinweis: Der Term $3x + \frac{1}{2}$ ist linear, aber *nicht* alle seine Koeffizienten sind ganzzahlig.

490945

Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit $|BC| > |CA|$. Die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$ schneide die Gerade BC in P und die Gerade CA in Q. Der Fußpunkt des von P auf die Gerade CA gefällten Lotes wird mit R, der Fußpunkt des von Q auf die Gerade BC gefällten Lotes wird mit S bezeichnet.

Zeigen Sie, dass die Punkte R, S und der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$ auf einer Geraden liegen.

490946

a) Man bestimme die kleinste positive ganze Zahl y, für die es eine ganze Zahl x gibt, so dass die Ungleichungskette

$$\frac{41}{2010} < \frac{x}{y} < \frac{1}{49}$$

erfüllt ist.

b) Es seien zwei vollständig gekürzte Brüche $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ mit $qr - ps = 1$ und $p, q, r, s > 0$ gegeben.

Bestimmen Sie auch hier die kleinste positive ganze Zahl y, für die es eine ganze Zahl x gibt, so dass die Ungleichungskette

$$\frac{p}{q} < \frac{x}{y} < \frac{r}{s}$$

erfüllt ist.