49. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 11
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

491144

Man finde alle Tripel $(x; y; z)$ positiver ganzer Zahlen, die Lösungen der Gleichung

$$(2x+1)(2y+1)(2z+1) = 11\,xyz$$

sind.

491145

Auf einer Tafel steht das Polynom $x^8 + x^7$. Peter hat es durch eine Folge von Differenziationen nach x und Multiplikationen mit $x + 1$ (in unbekannter Reihenfolge) in ein lineares Polynom $ax + b$ mit $a \neq 0$ transformiert. Man beweise, dass dann $a - b$ stets ein Vielfaches von 49 ist.

491146

Man betrachte acht paarweise voneinander verschiedene Punkte A, B, C, D, E, F, G und H, die auf einer gemeinsamen Kugeloberfläche liegen. Von diesen sei bekannt, dass die fünf Quadrupel (A, B, C, D), (A, B, F, E), (B, C, G, F), (C, D, H, G) und (D, A, E, H) komplanar sind. Man zeige, dass auch das Quadrupel (E, F, G, H) komplanar ist.

Hinweis: Ein Quadrupel (X, Y, Z, W) heißt genau dann komplanar, wenn die vier Punkte X, Y, Z, W in einer Ebene liegen, also komplanar sind.