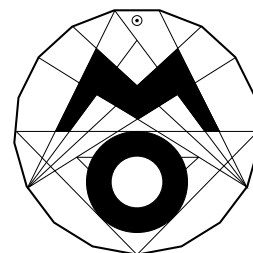


**49. Mathematik-Olympiade**  
**4. Stufe (Bundesrunde)**  
**Klasse 12–13**  
**Aufgaben – 1. Tag**

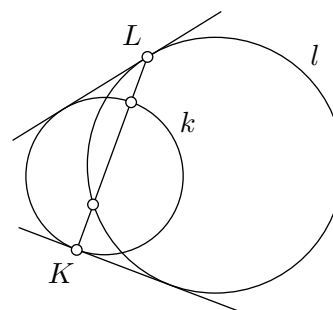


© 2010 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*  
 www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

491341

Man betrachte zwei Kreise  $k$  und  $l$ , die zwei Schnittpunkte haben mögen. Eine gemeinsame Tangente beider Kreise berühre  $k$  in  $K$ ; ihre andere gemeinsame Tangente berühre  $l$  in  $L$ . Man beweise, dass die Gerade  $KL$  aus den Kreisen Sehnen derselben Länge herauschneidet.



491342

Es seien  $a, b, c$  paarweise verschiedene reelle Zahlen. Man beweise, dass gilt

$$\left(\frac{2a-b}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{2b-c}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{2c-a}{c-a}\right)^2 \geq 5.$$

491343

Ein „unendliches Märchen“ ist eine Erzählung, die in einem Buch niedergeschrieben wird, das zwar einen Anfang, aber kein Ende hat und dessen Seiten mit den natürlichen Zahlen  $1, 2, 3, \dots$  durchnummeriert sind.

Ein Autor will ein unendliches Märchen schreiben, in welchem auf jeder Seite ein neuer Zwerg vorgestellt wird. Die Zwerge führen auf dieser Seite danach ein oder mehrere Gespräche, an denen jeweils eine Gesprächsgruppe von mindestens zwei der bereits bekannten Zwerge beteiligt ist. Die Anzahl der Gespräche auf einer Seite ist dabei nicht begrenzt. Um das Märchen spannender zu machen, fordert der Verlag vom Autor, dass die folgende zusätzliche Bedingung erfüllt ist:

Jede unendliche Menge von Zwergen enthält eine Gruppe von (mindestens zwei) Zwergen, die zu irgendeinem Zeitpunkt eine Gesprächsgruppe waren, sowie eine gleich große Gruppe, für die dies nicht der Fall ist.

Man entscheide, ob der Autor die Forderung des Verlags erfüllen kann.