50. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulstufe)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

500811

Anlässlich des 50. Geburtstages der Mathematik-Olympiade lädt Professor Knobelfix eine gewisse Anzahl guter Schüler zu einem mathematischen Ferienlager ein. In seiner Eröffnungsrede stellt Prof. Knobelfix fest: „Wenn jeder Teilnehmer am Ende der Veranstaltung mit jedem anderen genau eine Fotografie von sich selbst austauschen würde, dann müssten insgesamt genau 2450 Fotos verteilt werden.“

Untersuche, ob aus der Feststellung von Prof. Knobelfix eindeutig bestimmt werden kann, wie viele Schüler am Ferienlager teilnehmen. Ist dies der Fall, dann gib die Anzahl dieser Schüler an.

500812

Auf einem Kreis k liegen in dieser Reihenfolge sechs paarweise voneinander verschiedene Punkte A, B, C, D, E und F.

a) Ermittle die Anzahl der Dreiecke, die jeweils drei dieser sechs Punkte als Eckpunkte haben.

b) Ermittle die Anzahl der konvexen Vierecke, die jeweils vier dieser sechs Punkte als Eckpunkte haben.

c) Ermittle die Anzahl der konvexen Fünfecke, die jeweils fünf dieser sechs Punkte als Eckpunkte haben.

Hinweis: Ein n-Eck $P_1P_2\ldots P_n$ mit Ecken auf einem Kreis ist genau dann konvex, wenn seine Eckpunkte P_1, P_2, …, P_n in dieser Reihenfolge auf diesem Kreis liegen.

500813

Paul hat die rechts stehende Methode für das Quadrieren zweistelliger Zahlen entdeckt.

a) Erkläre diese Methode und berechne auf die gleiche Weise 59^2, 82^2 und 19^2.

b) Erkläre, warum dieses Rechenverfahren funktioniert.

c) Finde und erkläre ein entsprechendes Verfahren für das Quadrieren dreistelliger Zahlen.

$$\begin{array}{r} 67^2 \\ \hline 42 \\ 3649 \\ 42 \\ \hline 4489 \end{array}$$

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

500814

Gegeben ist ein Dreieck ABC mit folgenden Eigenschaften:

(1) Auf der Strecke $\overline{AB}$ liegt ein Punkt D.

(2) Die Größe α des Innenwinkels BAC ist kleiner als $45°$.

(3) Die Größe des Winkels BDC ist gleich dem Dreifachen von α.

(4) Die Größen der Winkel ACB und BDC sind gleich.

a) Ermittle die Größe β des Winkels CBA für den Fall, dass $\alpha = 20°$ gilt.

b) Ermittle für alle möglichen Werte von α die Größe β des Winkels CBA in Abhängigkeit von α.

c) Ermittle alle Werte α, für die ABC ein rechtwinkliges Dreieck ist.

Hinweis: Bei Aufgabenteil c) kann auf den Existenznachweis der Dreiecke verzichtet werden.

Mathematische Grundlagen: Viele mathematische Aufgaben kann man den Grundtypen *Beweisaufgabe* oder *Bestimmungsaufgabe* zuordnen.

Eine Beweisaufgabe enthält *gegebene Bedingungen* oder *Größen*. Das herzuleitende Ziel ist bekannt. Wie beim Beweis eines mathematischen Satzes lassen sich die Aussagen in *Voraussetzung* und *Behauptung* aufspalten und in der „Wenn-dann-Form“ formulieren. Ein *Beweis* ist erbracht, wenn man von den Voraussetzungen ausgehend in endlich vielen Schritten über *logisch abgeleitete Feststellungen* zur Behauptung gelangt. Jeder Beweisschritt ist eine *Schlussfolgerung*. Eine Schlussfolgerung kann notiert werden, indem festgehalten wird, von welchen Voraussetzungen oder abgeleiteten Feststellungen ausgehend man zu welcher neuen Feststellung gelangt und welches *Beweismittel* dabei eingesetzt wurde. Als Beweismittel dürfen mathematische Sätze, Definitionen, Formeln oder Umformungsregeln verwendet werden.

Jede *Bestimmungsaufgabe*, hier Aufgabe 500814, enthält *gegebene Bedingungen* oder *Größen* und *gesuchte, unbekannte Größen*. Eine gesuchte Größe im mathematischen Sinne zu *bestimmen* heißt, diese Größe aus den gegebenen Größen und eventuell weiteren wahren Aussagen durch korrektes logisches Schließen durch Anwendung mathematischer Sätze und mathematisch zulässiger Umformungen zu ermitteln. Es ist dabei im Allgemeinen auch zu untersuchen, ob das zu bestimmende Objekt überhaupt existiert und, wenn es existiert, ob es eindeutig bestimmt ist. Die Lösung einer Bestimmungsaufgabe kann man daher im Allgemeinen in zwei Schritte gliedern: Im ersten Schritt nimmt man die Existenz der Lösung an und zeigt, dass die Lösungen zu einer hergeleiteten Menge gehören müssen. Im zweiten Schritt zeigt man, dass die Elemente dieser Menge tatsächlich Lösungen sind. Dieser Schritt heißt daher auch *Existenzbeweis* oder *Probe*. Eine Bestimmungsaufgabe kann also mehrere Beweise beinhalten.

Etwas komplizierter ist die Situation bei Aufgaben, bei denen zu *untersuchen* ist, ob etwas existiert. Je nachdem, ob man die Nichtexistenz oder die Existenz vermutet, sind unterschiedliche Beweise zu führen. Bei der Nichtexistenz könnte es ein Widerspruchsbeweis sein und wir hätten eine Beweisaufgabe. Zum Nachweis der Existenz einer Lösung könnte man zum Beispiel eine Lösung angeben. Diese Lösung herzuleiten ist eine Bestimmungsaufgabe.

Um angeben zu können, aus welcher gegebenen Bedingung eine Schlussfolgerung gezogen wurde, ist es günstig, die gegebenen Bedingungen zu bezeichnen, im Fall von Aufgabe 500814 mit (1), (2), (3) und (4). Dies trifft auch auf *abgeleitete Feststellungen* zu, auf die später zurückgegriffen wird. Diese können bei Aufgabe 500814 mit (5), (6) usw. bezeichnet werden. Aus der Formulierung „Gegeben ist ein Dreieck ABC“ ist hier zu entnehmen, dass die zu bestimmenden Innenwinkel existieren. Deren Existenz ist hier also nicht mehr zu beweisen. Zu zeigen ist aber noch, dass es unter den gegebenen Voraussetzungen bei den Aufgabenteilen a) und b) nur eine Lösung gibt. Im Allgemeinen würde die Formulierung „untersuche, ob“ die Existenz des Objektes aber offen lassen.