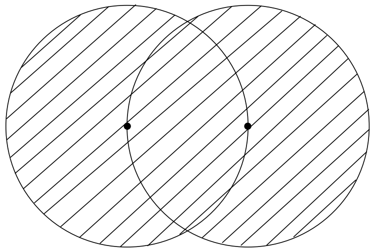
50. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulstufe)
Klasse 11–13
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

501311

Zwei Kreise mit gleichem Radius r schneiden sich so, dass der Mittelpunkt jedes Kreises auf dem Rand des jeweils anderen Kreises liegt, vgl. nebenstehende Abbildung.



Man bestimme den Flächeninhalt und den Umfang der schraffierten Fläche.

501312

Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -x - yz + w &= 50 && (1)\\ x^2 + y^2 &= 13 && (2)\\ x^2 y &= 12 && (3)\\ x^y - yz^2 + w &= 0, && (4) \end{aligned}$$

und es sollen nur positive reelle Lösungsquadrupel (x, y, z, w) dieses Gleichungssystems betrachtet werden. Was ist der größtmögliche Wert, den das Produkt $xyzw$ für ein solches Lösungsquadrupel annimmt?

501313

Man bestimme alle reellen Zahlen x, die die folgende Ungleichung erfüllen:

$$\frac{\sqrt{x+2}}{x} < 1.$$

501314

In einem Kurbad gibt es 100 Duschkabinen. In jeder Kabine befindet sich ein Hahn, der die Wasserzufuhr zur Dusche dieser Kabine regelt. Durch ein Versehen bei der Installation setzt aber jeder Hahn außerdem auch die Duschen in genau 5 anderen Kabinen in Betrieb.

Man beweise, dass die Kurverwaltung dann immer 10 Kabinen auswählen kann, in denen von der Fehlfunktion nichts zu bemerken ist, wenn die übrigen 90 Kabinen gesperrt werden.