50. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

500821

Bei einer 10 km langen Rennstrecke stimmen Startpunkt und Endpunkt überein. Bei einem Rennen werden zwei Runden von insgesamt 20 km auf dieser Strecke gefahren.

a) Ein Rennfahrer fährt die erste Runde „gemütlich“ mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 100 km/h. In der zweiten Runde möchte er so schnell fahren, dass er in beiden Runden insgesamt eine durchschnittliche Gesamtgeschwindigkeit von 200 km/h erreicht.

   Untersuche, ob dies möglich ist.

b) Angenommen, er fährt in der ersten Runde 150 km/h.

   Ermittle, wie schnell er in der zweiten Runde fahren müsste, um eine durchschnittliche Gesamtgeschwindigkeit von 200 km/h zu erreichen.

500822

Wir betrachten ein Spiel aus 50 gelben und 50 roten Chips. Eine bestimmte Anzahl von solchen Chips soll derart in eine Reihe aneinandergelegt werden, dass nie zwei rote Chips aneinanderliegen. Zwei gelbe Chips dürfen jedoch aneinanderliegen.

Zwei Reihen werden dabei genau dann als gleich betrachtet, wenn die Chips an gleicher Position die gleiche Farbe haben.

a) Ermittle die Anzahl aller Möglichkeiten, eine solche Reihe mit 4 Chips zu legen.

b) Ermittle die Anzahl aller Möglichkeiten, eine solche Reihe mit 5 Chips zu legen.

c) Ermittle die Anzahl aller Möglichkeiten, eine solche Reihe mit 10 Chips zu legen.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

500823

Gegeben ist ein Dreieck ABC, in dem die Größen der Innenwinkel BAC, CBA, ACB wie üblich mit α, β, γ bezeichnet sind.

Das Dreieck ABC und zwei Punkte D und E haben die folgenden Eigenschaften:

(1) Auf der Verlängerung der Seite $\overline{AB}$ über den Punkt A hinaus liegt der Punkt D so, dass die Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{AC}$ gleich lang sind.

(2) Auf der Verlängerung der Seite $\overline{AB}$ über den Punkt B hinaus liegt der Punkt E so, dass die Strecken $\overline{BE}$ und $\overline{BC}$ gleich lang sind.

a) Berechne die Größe φ des Winkels DCE, falls $\alpha = 30°$ gilt und dabei β doppelt so groß wie α ist.

b) Beweise, dass unter den Voraussetzungen (1) und (2) für die Größe φ des Winkels DCE stets $\varphi = 90° + \frac{1}{2}\gamma$ gilt.

c) Bestimme, unter welchen Bedingungen an die Innenwinkel des Dreiecks ABC das Dreieck DEC gleichschenklig ist.

500824

Einen Bruch, dessen Zähler 1 ist und dessen Nenner eine positive ganze Zahl ist, bezeichnet man als Stammbruch. Wenn es gelingt, einen Bruch als Summe von Stammbrüchen darzustellen, nennen wir diese Summendarstellung auch Zerlegung in Stammbrüche.

Beispiele:

$$\frac{3}{22} = \frac{1}{11} + \frac{1}{22}, \qquad \frac{31}{30} = \frac{1}{1} + \frac{1}{30} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}, \qquad \frac{303}{700} = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{25}.$$

a) Stelle $\frac{3}{20}$ als Summe zweier Stammbrüche dar.

b) Es seien a und b positive ganze Zahlen mit $a < b$.

Beweise: Wenn x und y positive ganze Zahlen mit $x \leq y$ und $\frac{a}{b} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ sind, dann gelten $y = \frac{bx}{ax - b}$ und $\frac{b}{a} < x \leq \frac{2b}{a}$.

c) Ermittle alle bis auf Reihenfolge der Summanden verschiedenen Möglichkeiten, $\frac{3}{20}$ als Summe zweier Stammbrüche darzustellen.

d) Stelle $\frac{5}{17}$ als Summe von paarweise verschiedenen Stammbrüchen dar.