50. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 9
Aufgaben

© 2010 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
`www.mathematik-olympiaden.de`. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

500921

Die natürlichen Zahlen von 1 bis 15 sollen so in einer Reihe aufgeschrieben werden, dass jede der fünfzehn Zahlen genau einmal vorkommt und die Summe je zweier benachbarter Zahlen eine Quadratzahl ist.

Bestimmen Sie alle Möglichkeiten!

500922

a) Geben Sie die Anzahl aller zweistelligen Zahlen an, die mindestens eine Ziffer 5 enthalten.
b) Ermitteln Sie die Anzahl aller dreistelligen Zahlen, die keine Ziffer 5 enthalten.
c) Untersuchen Sie, ob es mehr 50-stellige Zahlen gibt, in denen die Ziffer 5 nicht vorkommt, als solche, in denen sie mindestens einmal vorkommt.

Hinweis: Eine natürliche Zahl heißt n-stellig, wenn sie n Ziffern besitzt, wobei die erste nicht Null sein darf. Beispielsweise ist die Zahl 3462 vierstellig, die Ziffernfolge 0743 stellt hingegen keine vierstellige Zahl dar.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

500923

a) Der Bruch $\frac{62}{63}$ soll als Summe zweier vollständig gekürzter Brüche dargestellt werden, die sowohl verschiedene Zähler als auch verschiedene Nenner haben. Dabei sollen beide Nenner kleiner als 63 sein.

   Bestimmen Sie drei verschiedene solche Darstellungen. Dabei zählen zwei Darstellungen auch als gleich, wenn sie sich allein in der Reihenfolge der Summanden unterscheiden.

b) Der Bruch $\frac{20}{21}$ soll als Summe zweier vollständig gekürzter Brüche dargestellt werden, die gleiche Zähler, aber verschiedene Nenner haben. Dabei sollen beide Nenner kleiner als 21 sein.

   Bestimmen Sie alle solchen Darstellungen. Auch hier soll die Reihenfolge der Summanden keine Rolle spielen.

Hinweis: Ein *Bruch* b ist stets eine *positive* rationale Zahl. Die Darstellung $b = \frac{p}{q}$ heißt *vollständig gekürzt*, wenn $p > 0$ und $q > 0$ gilt und p, q teilerfremd sind.

500924

Im Inneren eines Dreiecks ABC ist ein Punkt D beliebig gewählt. Wir bezeichnen die Längen der Strecken $\overline{DA}, \overline{DB}, \overline{DC}$ mit x, y, z und die Länge des Umfangs des Dreiecks ABC mit u.

Zeigen Sie, dass stets die Ungleichungskette

$$\frac{1}{2}\,u < x + y + z < u$$

gilt.