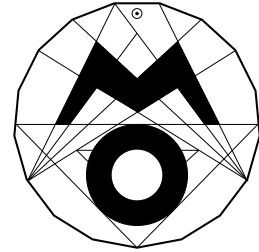


**50. Mathematik-Olympiade**  
**2. Stufe (Regionalrunde)**  
**Klasse 10**  
**Aufgaben**



© 2010 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*  
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

501021

Untersuchen Sie, für welche reellen Zahlen  $a$  die Gleichung  $(x^2 - a)(x^2 + 2ax - a) = 0$  keine, genau eine, genau zwei, genau drei bzw. mehr als drei reelle Lösungen besitzt.

501022

Wir betrachten das Vorkommen verschiedener Ziffern in  $n$ -stelligen Zahlen.

- a) Geben Sie die Anzahl aller zweistelligen Zahlen an, die keine Ziffer 3 enthalten.
- b) Es sei  $x$  die Anzahl aller dreistelligen Zahlen, die die Ziffer 4 nicht enthalten, und  $y$  sei die Anzahl der dreistelligen Zahlen, die die Ziffer 4 mindestens einmal enthalten. Ermitteln Sie die Anzahlen  $x$  und  $y$  und geben Sie das gekürzte Verhältnis  $x : y$  an.
- c) Ermitteln Sie die größte Stellenzahl  $n$ , für die gilt: Es gibt mehr  $n$ -stellige natürliche Zahlen, in denen die Ziffer 5 nicht vorkommt, als solche, in denen sie mindestens einmal vorkommt.

*Hinweis:* Eine Zahl heißt  $n$ -stellig, wenn sie  $n$  Ziffern besitzt, wobei die erste nicht Null sein darf. Beispielsweise ist die Zahl 3462 also vierstellig, die Ziffernfolge 0743 stellt hingegen keine vierstellige Zahl dar.

501023

Im Inneren eines Dreiecks  $ABC$  ist ein Punkt  $D$  beliebig gewählt. Wir bezeichnen die Längen der Strecken  $\overline{DA}$ ,  $\overline{DB}$ ,  $\overline{DC}$  mit  $x$ ,  $y$ ,  $z$  und die Länge des Umfangs des Dreiecks  $ABC$  mit  $u$ .

Zeigen Sie, dass stets die Ungleichungskette

$$\frac{1}{2}u < x + y + z < u$$

gilt.

*Auf der nächsten Seite geht es weiter!*

501024

Wir betrachten in dieser Aufgabe Rechtecke  $R_1$  und  $R_2$ , welche die folgenden drei Bedingungen erfüllen:

- (1) Die Seitenlängen der Rechtecke sind positive ganze Zahlen.
- (2) Der Flächeninhalt des Rechtecks  $R_2$  ist doppelt so groß wie der Flächeninhalt des Rechtecks  $R_1$ .
- (3) Die beiden Rechtecke haben den gleichen Umfang  $u$ .

Nun die drei Teile der Aufgabe:

- a) Bestimmen Sie alle möglichen Seitenlängen solcher Rechtecke  $R_1$  und  $R_2$ , deren Umfang  $u = 34$  beträgt.
- b) Seien  $R_1$  und  $R_2$  zwei Rechtecke, die obige drei Bedingungen erfüllen und für die  $u > 34$  gilt.  
Zeigen Sie, dass die Länge der Diagonalen des Rechtecks  $R_2$  ebenfalls ganzzahlig ist.
- c) Es sei umgekehrt  $R_2$  ein Rechteck mit ganzzahligen Seitenlängen, ganzzahliger Diagonalenlänge und  $u > 34$ .  
Zeigen Sie, dass es dazu stets ein Rechteck  $R_1$  gibt, welches die obigen drei Bedingungen erfüllt.