50. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 11–13
Aufgaben

© 2010 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
`www.mathematik-olympiaden.de`. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

501321

Gegeben sind neun positive ganze Zahlen, die in einer solchen Reihenfolge angeordnet sind, dass die Summe von jeweils drei aufeinander folgenden Zahlen gleich ist. Die erste Zahl in der Reihenfolge ist 450, die letzte 50. Die Summe aller Zahlen beträgt 2010.

Man bestimme alle neun Zahlen.

501322

Zwei Quadrate mit den Seitenlängen a und b sind so angeordnet, dass sich jeweils zwei benachbarte Eckpunkte auf einem Kreis k befinden und die beiden anderen auf einer Sehne s von k liegen (siehe Abbildung A 501322).

a) Man bestimme den Abstand des Mittelpunkts M des Kreises k von der Sehne s in Abhängigkeit von a und b.

b) Man untersuche, welche Werte das Verhältnis der Seitenlängen a und b der Quadrate annehmen kann.

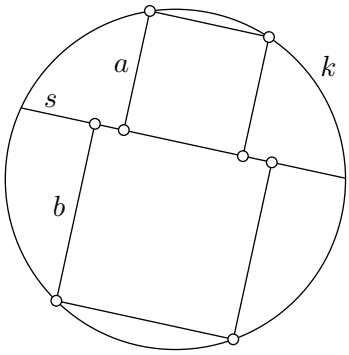

Abbildung A 501322

501323

In Abhängigkeit von der reellen Zahl a ermittle man alle reellen Zahlen x, die die Ungleichung

$$\sqrt{2x^2+3} < x - a$$

erfüllen.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

501324

An eine anfangs kreisförmige Schneeflocke lagert sich in jeder Minute eine neue Schicht an. Jede derartige Schicht besteht aus einer Kette von Kreisen, die sich von außen um die Schneeflocke herumlegt. Dabei sollen nach n Minuten, also nach Anlagerung der n-ten Schicht, jeweils folgende Bedingungen gelten:

(i) Jeder Kreis der neuen n-ten Schicht berührt genau einen oder genau zwei Kreise der vorangehenden $(n-1)$-ten Schicht. (Hierbei gilt die anfängliche kreisförmige Flocke als 0-te Schicht.)

(ii) Jeder Kreis der n-ten Schicht berührt genau zwei Kreise der n-ten Schicht.

(iii) Für $n \geq 2$ werden je zwei benachbarte Kreise der vorangehenden $(n-1)$-ten Schicht gemeinsam von genau einem Kreis der neuen n-ten Schicht berührt.

(iv) Jeder Kreis, der nicht der n-ten Schicht angehört, wird von genau sieben Kreisen berührt.

Abbildung A 501324 zeigt eine Schneeflocke nach Anlagerung der ersten Schicht und eine Schneeflocke nach Anlagerung der ersten und der zweiten Schicht.

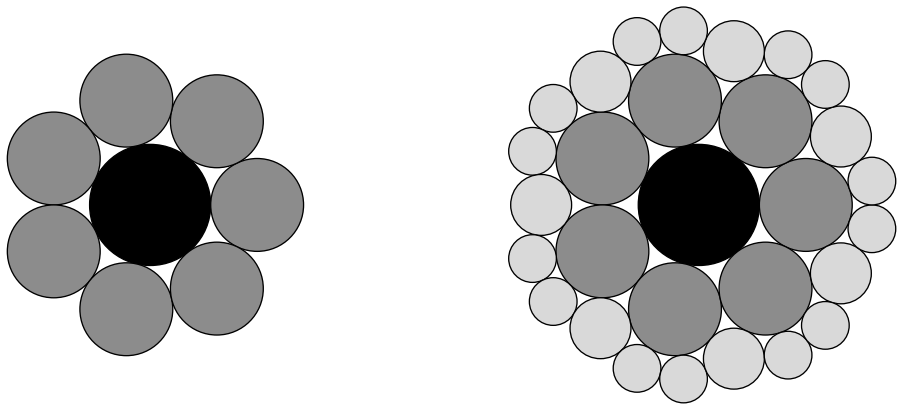

Abbildung A 501324

Nach der Anlagerung von n Schichten bezeichne x_n die Anzahl aller Kreise mit genau 3 und y_n die Anzahl aller Kreise mit genau 4 Nachbarn. Man bestimme alle Zahlen n, für die das Verhältnis $\frac{x_n}{y_n}$ den Wert $\frac{5}{3}$ hat.

Bemerkung: Es darf vorausgesetzt werden, dass die Anlagerung jeder neuen Schicht möglich ist.