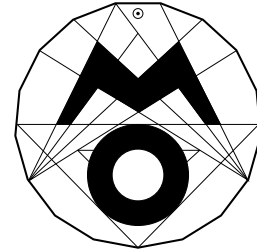


50. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 9
Aufgaben – 2. Tag

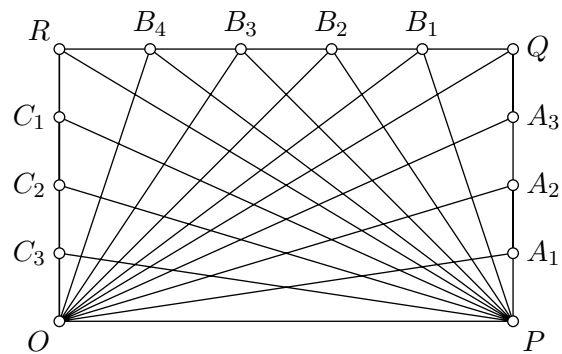


© 2011 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
 www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

500934

Gegeben sei ein Rechteck $OPQR$. Dessen Seiten \overline{PQ} und \overline{RO} seien jeweils durch n Punkte in $n + 1$ gleich lange Strecken und die Seite \overline{QR} durch m Punkte in $m + 1$ gleich lange Strecken geteilt. Die Teilpunkte auf \overline{PQ} seien von P beginnend mit A_1, \dots, A_n bezeichnet, die auf \overline{QR} von Q beginnend mit B_1, \dots, B_m und die auf \overline{RO} von R beginnend mit C_1, \dots, C_n . Nun werden von O und P aus zu sämtlichen Teilpunkten und zu den Eckpunkten Q und R Verbindungsstrecken gezeichnet.



Wie viele voneinander verschiedene Schnittpunkte dieser Verbindungsstrecken gibt es im Inneren des Rechtecks?

Die nebenstehende Abbildung veranschaulicht die Aufgabenstellung für $m = 4$ und $n = 3$:

500935

Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse \overline{AB} . Der Fußpunkt der von C ausgehenden Höhe werde mit H bezeichnet. Auf der Geraden AB werden zwei Punkte P und Q außerhalb der Strecke \overline{AB} derart gewählt, dass zum einen P von den Geraden CH und CB und zum anderen Q von den Geraden CH und CA den gleichen Abstand hat.

Man beweise, dass der Umkreismittelpunkt M des Dreiecks PQC von den Geraden AB , BC und CA den gleichen Abstand hat.

500936

Man bestimme alle Paare $(p; q)$ von Primzahlen, für die auch $p^2 - 3q - 1$ eine Primzahl ist.