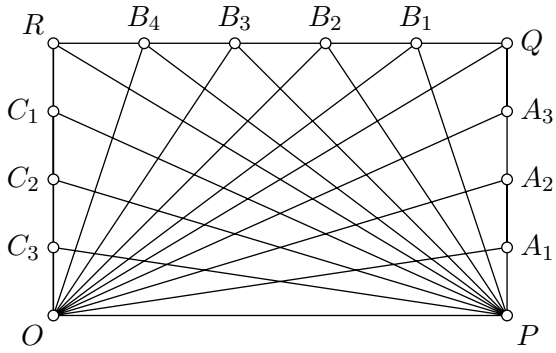
50. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 10
Aufgaben – 2. Tag

© 2011 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
`www.mathematik-olympiaden.de`. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

501034

Gegeben sei ein Rechteck $OPQR$. Dessen Seiten $\overline{PQ}$ und $\overline{RO}$ seien jeweils durch n Punkte in $n+1$ gleich lange Strecken und die Seite $\overline{QR}$ durch m Punkte in $m+1$ gleich lange Strecken geteilt. Die Teilpunkte auf $\overline{PQ}$ seien von P beginnend mit $A_1, \ldots, A_n$ bezeichnet, die auf $\overline{QR}$ von Q beginnend mit $B_1, \ldots, B_m$ und die auf $\overline{RO}$ von R beginnend mit $C_1, \ldots, C_n$. Nun werden von O und P aus zu sämtlichen Teilpunkten und zu den Eckpunkten Q und R Verbindungsstrecken gezeichnet.



Wie viele voneinander verschiedene Schnittpunkte dieser Verbindungsstrecken gibt es im Inneren des Rechtecks?

Die nebenstehende Abbildung veranschaulicht die Aufgabenstellung für $m = 4$ und $n = 3$:

501035

Man bestimme alle Paare $(p; q)$ von Primzahlen, für die auch $p^2 - 3\,q - 1$ eine Primzahl ist.

501036

Gegeben sei ein spitzer Winkel mit dem Scheitelpunkt S und den Schenkeln g und h. Die Punkte A und B mögen auf dem Schenkel g so liegen, dass A zwischen S und B liegt. Der Schnittpunkt der Senkrechten zu h durch A sei mit L bezeichnet.

Ein Punkt P liege auf dem Schenkel h so, dass h eine Tangente an den Umkreis des Dreiecks ABP ist.

a) Zeigen Sie: Falls ABP ein in P rechtwinkliges Dreieck ist, so ist die Bedingung

$$\frac{|SB| - |SA|}{|SB| + |SA|} = \frac{|AL|}{|SA|} \tag{1}$$

erfüllt.

b) Zeigen Sie: Falls Bedingung (1) erfüllt ist, so ist das Dreieck ABP rechtwinklig in P.