

50. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 11–13
Aufgaben – 1. Tag



© 2011 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

501331

Man bestimme alle Paare $(a; b)$ positiver ganzer Zahlen, die die Gleichung

$$a^b + b^a + 1 = 3ab$$

erfüllen.

501332

In einem Quadrat mit der Seitenlänge 1 befinden sich Kreisscheiben, die sich gegenseitig nicht überlappen. Die Summe ihrer Umfänge sei gleich 10. Man zeige, dass die Anzahl der Kreisscheiben nicht kleiner als 8 sein kann.

501333

Die Zahlenfolge x_1, x_2, x_3, \dots ist durch $x_1 = 1$ und die rekursive Vorschrift

$$x_{k+1} = x_k + \frac{1}{x_k} \quad \text{für } k = 1, 2, \dots$$

definiert.

- a) Man beweise, dass $x_{501333} > 1000$ gilt.
- b) Man berechne den ganzzahligen Anteil von x_{501333} .

Hinweis: Der ganzzahlige Anteil $\lfloor x \rfloor$ einer reellen Zahl x ist diejenige ganze Zahl y , für die $x - 1 < y \leq x$ gilt.