

50. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 8
Aufgaben – 1. Tag



© 2011 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

500841

Ermittle alle geordneten Paare $(a; b)$ positiver ganzer Zahlen, deren Produkt das Vierfache ihrer Summe ist.

500842

Die „Gesellschaft der Freunde von logischen Aufgaben“ hat Probleme:

Sechs Personen – nennen wir sie A, B, C, D, E und F – wurden in die engere Wahl für die Funktion des Vorsitzenden, des Stellvertreters und des Schriftführers gezogen. Bekanntlich ist Vorsitzender die höchste und Schriftführer die niedrigste dieser drei Funktionen. Zusammen bilden sie den Vorstand.

Die Besetzung dieser drei Funktionen erweist sich als nicht so leicht, weil jeder der sechs gewisse Ansprüche stellt:

- (1) A will nicht zum Vorstand gehören, wenn E nicht Vorsitzender wird.
- (2) B will nicht zum Vorstand gehören, wenn C mit niedrigerer Funktion zum Vorstand gehört.
- (3) B will unter gar keinen Umständen zusammen mit F im Vorstand arbeiten.
- (4) C will nicht im Vorstand mitarbeiten, wenn diesem E und F angehören.
- (5) C will nicht im Vorstand mitarbeiten, wenn F Vorsitzender oder B Schriftführer ist.
- (6) D will nicht mit C oder E im Vorstand arbeiten, wenn er eine niedrigere Funktion als C oder E hat.
- (7) E will nicht Stellvertreter sein.
- (8) E will nicht Schriftführer sein, wenn D Mitglied des Vorstands ist.
- (9) E will nicht zusammen mit A im Vorstand arbeiten, wenn F nicht dem Vorstand angehört.
- (10) F will nur mitarbeiten, wenn er oder C Vorsitzender wird.

Ermittle alle Möglichkeiten unter Beachtung der Wünsche aller dieser eigensinnigen Kandidaten, einen Vorstand aus einem Vorsitzenden, einem Stellvertreter und einem Schriftführer zu bilden.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

500843

Über ein konvexes Viereck $ABCD$ wird vorausgesetzt:

- (1) Die Seiten \overline{AB} und \overline{CD} sind gleich lang.
- (2) Für die Größe β des Winkels CBA gilt $\beta < 90^\circ$.
- (3) Für β und die Größe γ des Winkels DCB gilt $\beta + \gamma > 180^\circ$.
- (4) Die Mittelsenkrechte der Seite \overline{BC} und die Mittelsenkrechte der Seite \overline{AD} schneiden einander im Punkt P .

Ermittle aus diesen Voraussetzungen die Größe φ des Innenwinkels des Dreiecks CPB am Punkt P in Abhängigkeit von β und γ und den Lagen von P .

Bemerkung: Ein Viereck heißt *konvex*, wenn nichtbenachbarte Seiten keinen gemeinsamen Punkt haben und alle Innenwinkel kleiner als 180° sind.

In Abbildung A 500843 sind drei Vierecke als Beispiel dargestellt. Das Viereck $ABCD$ ist konvex. Das Viereck $EFGH$ ist nicht konvex (aber konkav), weil der Innenwinkel EHG größer als 180° ist. Das Viereck $IJKL$ ist nicht konvex (aber überschlagen), da die nichtbenachbarten Seiten \overline{IL} und \overline{JK} einen gemeinsamen Punkt haben.

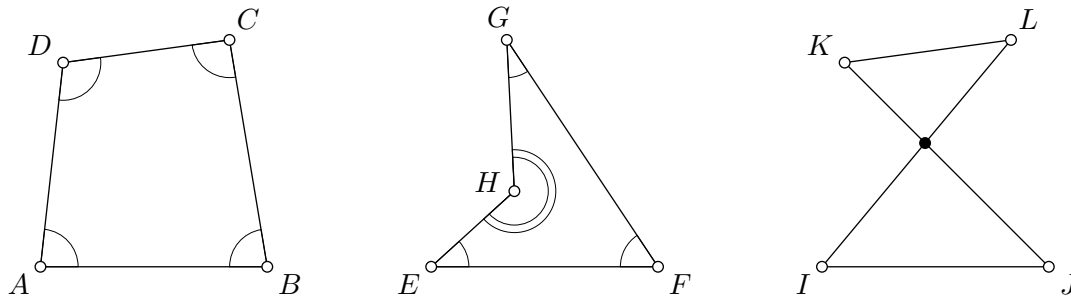


Abbildung A 500843