50. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 10
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

501041

Wie viele verschiedene achtbuchstabige Wörter (auch sinnlose oder unaussprechliche Wörter sind erlaubt) kann man aus drei Buchstaben A, drei Buchstaben B und zwei Buchstaben C bilden, bei denen gleiche Buchstaben nie nebeneinander stehen?

501042

Im Raum ist ein Quadrat $ACEG$ der Seitenlänge a gegeben. Dieses liefere nach Drehung innerhalb seiner Ebene um $45°$ um seinen Diagonalenschnittpunkt S und nachfolgender Verschiebung um eine Strecke der Länge h senkrecht zu seiner Ebene das Quadrat $BDFH$. Hierbei werde angenommen, dass die Punkte A, C, E, G in dieser Reihenfolge auf die Punkte B, D, F, H abgebildet werden.

Man bestimme den Abstand des Schnittpunkts X der Ebenen $\varepsilon(ABC)$, $\varepsilon(CDE)$ und $\varepsilon(EFG)$ zum Schnittpunkt Y der Ebenen $\varepsilon(BCD)$, $\varepsilon(DEF)$ und $\varepsilon(FGH)$ in Abhängigkeit von h und a.

501043

Es sei M die Menge der ganzen Zahlen z mit $2011 \leq z \leq 501\,043$. Drei Zahlen a, b und c werden unabhängig voneinander zufällig aus der Menge M gewählt. Bei jeder dieser drei Wahlen seien alle Elemente von M gleich wahrscheinlich. Dadurch kann natürlich auch zwei- oder dreimal das gleiche Element von M gewählt werden. Wir betrachten die Gleichung

$$ax^2 + 2bx + c = 0 \tag{1}$$

und bezeichnen mit P, Q und R die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass diese Gleichung keine, genau eine bzw. zwei verschiedene reelle Lösungen hat.

Beweisen Sie, dass $Q < P < R$ gilt.