51. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulstufe)
Klasse 9 und 10
Aufgaben

Hinweise: 1. *Für die Jahrgangsstufen 9 und 10 stehen in der ersten Runde insgesamt sechs Aufgaben zur Verfügung, aus denen die Verantwortlichen vor Ort eine geeignete Auswahl treffen können. Wenn die erste Runde als Hausaufgabenwettbewerb durchgeführt wird, kann die Wahl von vier der sechs Aufgaben auch den Teilnehmenden überlassen werden.*

2. *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

511011

Martin reklamiert bei seinem Vorgesetzten Herrn Geizig: „Mir wurde zu wenig Geld für meine Reisekosten überwiesen! Ich hatte Ihnen doch die exakte ganzzahlige Summe angegeben und jetzt fehlen genau 26 €.“ Herr Geizig antwortet: „Entschuldigen Sie, da muss mir wohl ein Zahlendreher unterlaufen sein! Ich habe bestimmt im Betrag einfach zwei Ziffern vertauscht.“

Begründen Sie, dass diese Erklärung nicht stimmen kann.

511012

Die Seiten zweier unterschiedlich dicker Bücher werden fortlaufend durchnummeriert – jeweils beginnend mit der Seite 1 auf der Vorderseite des ersten Blattes.

a) Zum Nummerieren der Seiten des ersten Buches benötigt man 6941 Ziffern.
Ermitteln Sie die Nummer der letzten Seite.

b) Wir betrachten im Folgenden die Seitennummern und nicht mehr die Anzahl der verwendeten Ziffern. Aus dem zweiten Buch hat jemand ein Blatt herausgerissen, dadurch fehlen die beiden Nummern auf Vorder- und Rückseite dieses Blattes. Die Summe aller noch verbliebenen Seitennummern im zweiten Buch beträgt 81 707.
Ermitteln Sie die beiden fehlenden Seitennummern.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

511013

Es sollen Sitzanordnungen für sieben Paare (jeweils ein Mann und eine Frau) untersucht werden. Eines dieser Paare ist das Hochzeitspaar, die anderen sind bei der Hochzeitsfeier zu Gast. Es stehen zwei runde Tische zur Verfügung: ein Tisch für vier Paare und einer für drei Paare. Das Hochzeitspaar soll am großen Tisch sitzen. Die Paare setzen sich stets so an den Tisch, dass jede Frau rechts neben ihrem Mann sitzt.

a) Wie viele verschiedene Sitzordnungen gibt es?
Hinweis: Zwei Sitzordnungen an einem Tisch sollen gleich sein, wenn man die eine aus der anderen dadurch erreichen kann, dass alle am Tisch Sitzenden um einen Stuhl oder um die jeweils gleiche Anzahl von Stühlen in die gleiche Richtung rutschen (den Platz der vorher dort Sitzenden einnehmen).

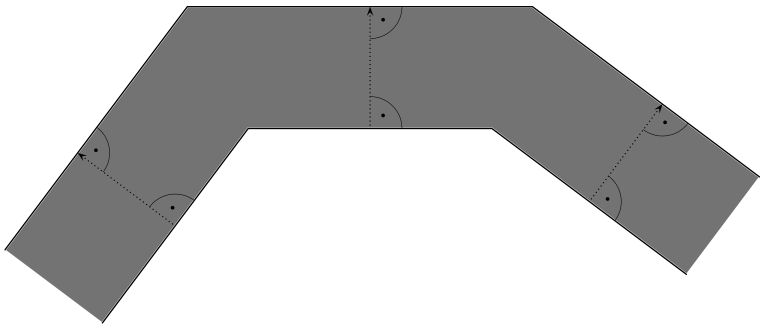
b) Zu später Stunde werden alle Regeln bezüglich der Sitzordnung fallen gelassen; jeder setzt sich da hin, wo er möchte. Wie viele Sitzordnungen sind jetzt denkbar?

511014

Alle Seiten eines konvexen n-Ecks vom Umfang 12 cm werden um 1 cm nach außen „verschoben“ wie in der Skizze für einen Teil eines solchen n-Ecks dargestellt.

Beweisen Sie, dass sich dabei der Flächeninhalt des n-Ecks um mehr als 15 cm^2 vergrößert.

Hinweis: Ein n-Eck heißt konvex, wenn nichtbenachbarte Seiten keinen gemeinsamen Punkt haben und alle Innenwinkel kleiner als 180° sind.



511015

Beweisen Sie für beliebig gegebene positive ganze Zahlen m und n:

a) Es ist möglich, $m+n$ unterschiedliche Punkte $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n$ in derselben Ebene so zu wählen, dass
   – es eine Gerade durch die Punkte $A_1, \dots, A_m$ gibt,
   – es eine andere Gerade durch die Punkte $B_1, \dots, B_n$ gibt
   – und die Geraden A_iB_k und A_jB_ℓ parallel sind, falls $i + \ell = j + k$ ist.

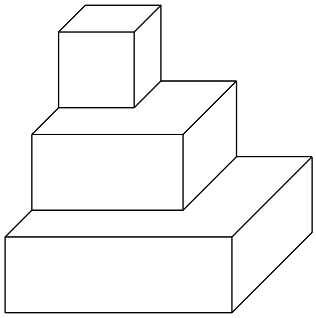
b) Es ist möglich, $m + n$ Punkte $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n$ (wieder paarweise verschieden) in derselben Ebene so zu wählen, dass
   – keine drei dieser $m + n$ Punkte auf derselben Geraden liegen,
   – die Geraden A_iB_k und A_jB_ℓ parallel sind, falls $i + \ell = j + k$ ist.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

<u>511016</u>

Aus Einheitswürfeln der Kantenlänge 1 cm wird ein stufenförmiger Körper wie folgt zusammengesetzt: In der obersten Schicht befindet sich genau ein Würfel. Er steht auf einer Schicht aus $2 \cdot 2$ Würfeln, diese wiederum auf einer Schicht aus $3 \cdot 3$ Würfeln usw.

Wenn ein solcher Körper n Schichten besitzt, dann besteht die unterste Schicht also aus $n \cdot n$ Würfeln. Die Schichten des Körpers sind so angeordnet, wie es die Abbildung für $n = 3$ zeigt.



a) Aus Einheitswürfeln wurde ein solcher Körper mit 6 Schichten zusammengeleimt. Danach bearbeitete man diejenigen Kanten des Körpers mit einer Schleifmaschine, die die Stufen vorn und rechts bilden. Auf diese Weise entstand durch das schräge Abschleifen der Stufen eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche und einem Volumen $V = 72\,\text{cm}^3$. (Die Existenz einer solchen Pyramide kann hier vorausgesetzt werden; eine Begründung wird nicht verlangt.)
Berechnen Sie den Anteil des Ausgangsvolumens, der bei der Bearbeitung abgeschliffen wurde.

b) Untersuchen Sie, ob bei einem stufenförmigen Körper mit $n = 2011$ Schichten die Anzahl der verwendeten Einheitswürfel durch 9 teilbar ist. Sollte dies nicht der Fall sein, dann ermitteln Sie die erste Zahl n nach 2011, für die diese Anzahl durch 9 teilbar ist.

c) Begründen Sie, dass für jede positive Schichtenanzahl n der stufenförmige Körper aus mehr als $\frac{1}{3} \cdot n^3$, aber aus weniger als $\frac{1}{3} \cdot (n+1)^3$ Einheitswürfeln besteht.