

51. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulstufe)
Klasse 11-13
Aufgaben



© 2011 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

511311

Man ermittle alle Paare $(n; p)$ mit einer positiven ganzen Zahl n und einer Primzahl p , die die Gleichung

$$n^2 - 8n + 6 = p - 1$$

erfüllen.

511312

Gegeben sei ein Halbkreis über der Strecke \overline{AC} . Auf der Strecke \overline{AC} liege der Punkt B . Die Senkrechte zu \overline{AC} durch B schneide den Halbkreis über der Strecke \overline{AC} im Punkt D . Über den Strecken \overline{AB} und \overline{BC} seien Halbkreise gezeichnet wie in der Abbildung gezeigt.

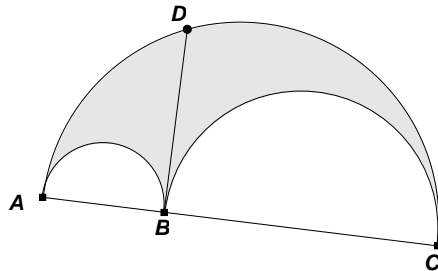


Abbildung A511312

Man beweise, dass der Kreis mit dem Durchmesser \overline{BD} und die grau markierte Fläche denselben Flächeninhalt haben.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

511313

Man bestimme den kleinstmöglichen Wert des Produktes $p = a \cdot b \cdot c \cdot d$, wenn die ganzen Zahlen a, b, c, d den folgenden Bedingungen (1)–(4) genügen:

- (1) $a > 10$,
- (2) $6a = b + c$,
- (3) $8a = c + d - 2$,
- (4) $10a = b + c + d - 3$.

511314

Es wird ein Würfelspiel mit folgenden Regeln gespielt: Ein Spieler würfelt mit einem Würfel und bekommt die jeweiligen Augenzahlen als Punkte gutgeschrieben, bis er eine Eins bekommt oder sich entscheidet aufzuhören. Bekommt er eine Eins, verfallen alle bisher erwürfelten Punkte und das Spiel ist beendet. Hört er auf, erhält er alle Punkte gutgeschrieben.

Der Spieler möchte so spielen, dass der Erwartungswert seiner Punktzahl möglichst hoch ist.

- a) Sollte er weiterspielen, wenn er bereits 15 Punkte erreicht hat?
- b) Der Spieler möge x Punkte erreicht haben. Für welche Werte von x würde man ihm nun raten aufzuhören?