

51. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 9
Aufgaben



© 2011 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

510921

Für zwei rationale Zahlen a und b gelten die vier Ungleichungen

$$a + b \neq 0,9, \quad a - b \neq 3,6, \quad a \cdot b \neq 1,6, \quad a : b \neq 3,9.$$

Die Zahlen 0,9; 3,6; 1,6 und 3,9 stimmen jedoch (in anderer Reihenfolge) mit je einer der Zahlen $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$ und $a : b$ überein.

Ermitteln Sie die Zahlen a und b . Weisen Sie nach, dass nur ein Zahlenpaar $(a; b)$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

510922

Eine Anzeigetafel ist mit roten, grünen und blauen Leuchtdioden bestückt. Das Übertragungskabel vom Steuerpult zur Tafel liefert in drei getrennten Leitungen für jede der drei Farben die Signale „0“ (Licht aus) bzw. „1“ (Licht ein). Die Kombination (R, G, B) dieser Farbanteile liefert 8 Anzeigefarben:

$$\left| \begin{array}{l} (0, 0, 0) = \text{schwarz} \\ (1, 0, 0) = \text{rot} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} (0, 0, 1) = \text{blau} \\ (1, 0, 1) = \text{magenta} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} (0, 1, 0) = \text{grün} \\ (1, 1, 0) = \text{gelb} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} (0, 1, 1) = \text{cyan} \\ (1, 1, 1) = \text{weiß} \end{array} \right|$$

Bei der Herstellung der Übertragungskabel können folgende zwei Fehler auftreten:

Fehler 1: Im Kabel werden genau zwei der drei Farbleitungen vertauscht. (Z. B. kommt ein gesendetes Grün-Signal am Blau-Anschluss der Tafel an und umgekehrt.)

Fehler 2: Genau zwei der drei Leitungen sind schlecht isoliert und berühren sich. (Eine Leitung im Zustand „1“ setzt auch die Nachbarleitung auf „1“, selbst wenn diese eigentlich das Signal „0“ übertragen soll).

Wenn in einem Leitungspaar der Fehler 1 auftritt, dann tritt Fehler 2 höchstens zwischen genau einer dieser beiden Leitungen und der dritten Leitung auf.

Ein Qualitätstest besteht darin, die Signalkombination einer der 8 möglichen Farben an die Tafel zu senden und mit der Signalkombination der tatsächlich ankommenden Farbe zu vergleichen. Mit mehreren solcher Tests will man ermitteln, ob ein Fehler im Kabel ist und um welche(n) Fehler zwischen welchen Leitungen es sich handelt.

Zum Test eines Kabels sendet man zunächst die Signalkombination $(1, 0, 0)$.

Ihre Aufgabe: Weisen Sie nach, dass in jedem Fall ein weiterer Test ausreicht, um alle Fehler und die betroffenen Leitungen zu ermitteln.

510923

Ermitteln Sie alle diejenigen Paare (p, z) aus einer Primzahl p und einer positiven ganzen Zahl z , für welche die Beziehung $z^2 = 25p + 9$ gilt.

510924

Es sei ABC ein Dreieck mit $|AC| < |BC|$. Die Winkelhalbierende des Innenwinkels bei C schneide die Seite \overline{AB} in einem Punkt P , die Außenwinkelhalbierende desselben Winkels schneide die Gerade AB in einem Punkt Q . Die Punkte X und Y seien die Fußpunkte der Lote von P auf die Geraden AC bzw. BC .

- a) Beweisen Sie, dass das Dreieck PCQ rechtwinklig ist, und dass $|PX| = |PY|$ gilt.
- b) Beweisen Sie, dass das Verhältnis der Längen der Strecken \overline{AP} und \overline{BP} mit dem Verhältnis der Flächeninhalte der Dreiecke APC und BPC übereinstimmt.
- c) Beweisen Sie, dass $|AP| : |PB| = |AC| : |CB|$ gilt.
- d) Beweisen Sie, dass $|AQ| : |QB| = |AC| : |CB|$ gilt.

Hinweis: In jeder der vier Teilaufgaben ist die Ausführung eines Beweises verlangt. Das bloße Zitieren eines bekannten Satzes genügt hier nicht.