

51. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 10
Aufgaben



© 2011 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

511021

Eine Anzeigetafel ist mit roten, grünen und blauen Leuchtdioden bestückt. Das Übertragungskabel vom Steuerpult zur Tafel liefert in drei getrennten Leitungen für jede der drei Farben die Signale „0“ (Licht aus) bzw „1“ (Licht ein). Die Kombination (R, G, B) dieser Farbanteile liefert 8 Anzeigefarben:

$(0, 0, 0) = \text{schwarz}$	$(0, 0, 1) = \text{blau}$	$(0, 1, 0) = \text{grün}$	$(0, 1, 1) = \text{cyan}$
$(1, 0, 0) = \text{rot}$	$(1, 0, 1) = \text{magenta}$	$(1, 1, 0) = \text{gelb}$	$(1, 1, 1) = \text{weiß}$

Bei der Herstellung der Übertragungskabel können folgende zwei Fehler auftreten:

Fehler 1: Im Kabel werden genau zwei der drei Farbleitungen vertauscht (z. B. kommt ein gesendetes Grün-Signal am Blau-Anschluss der Tafel an und umgekehrt).

Fehler 2: Genau zwei der drei Leitungen sind schlecht isoliert und berühren sich. (Eine Leitung im Zustand „1“ setzt auch die Nachbarleitung auf „1“, selbst wenn diese eigentlich das Farbsignal „0“ übertragen soll).

Wenn in einem Leitungspaar der Fehler 1 auftritt, dann tritt Fehler 2 höchstens zwischen genau einer dieser beiden Leitungen und der dritten Leitung auf.

Ein Qualitätstest besteht darin, die Signalkombination einer der 8 möglichen Farben an die Tafel zu senden und mit der Signalkombination der tatsächlich ankommenden Farbe zu vergleichen. Mit mehreren solcher Tests will man ermitteln, ob ein Fehler im Kabel ist und um welche(n) Fehler zwischen welchen Leitungen es sich handelt.

Ihre Aufgabe: Weisen Sie in jedem Fall nach, dass kein Test allein zur vollständigen Fehlerermittlung ausreicht.

511022

Für zwei positive rationale Zahlen a und b mit $a > 2$ werden die Terme a^2 , $a+b$, $a-b$, $a \cdot b$, $a : b$ und b^2 gebildet.

Weisen Sie nach, dass die Summe der sechs Terme stets größer als 12 ist.

511023

Ermitteln Sie alle diejenigen Paare (p, z) aus einer Primzahl p und einer positiven ganzen Zahl z , für welche die Beziehung $z^2 = 25p + 9$ gilt.

511024

Es sei ABC ein Dreieck mit $|AC| < |BC|$. Die Winkelhalbierende des Innenwinkels bei C schneide die Seite \overline{AB} in einem Punkt P , die Außenwinkelhalbierende desselben Winkels schneide die Gerade AB in einem Punkt Q . Die Parallele zu AC durch B schneide die Gerade CP in R .

- a) Beweisen Sie, dass das Dreieck PCQ rechtwinklig und das Dreieck RBC gleichschenkelig ist.
- b) Beweisen Sie, dass $|AP| : |PB| = |AC| : |CB|$ gilt.
- c) Beweisen Sie, dass $|AQ| : |BQ| = |AC| : |CB|$ gilt.
- d) Es gelte $\sphericalangle ACB = 90^\circ$, $|AC| = 3$ und $|BC| = 4$.
Bestimmen Sie das Verhältnis $|QC| : |CP|$!

Hinweis: In jeder der Teilaufgaben a)–c) ist die Ausführung eines Beweises verlangt. Das bloße Zitieren eines bekannten Satzes genügt hier nicht.