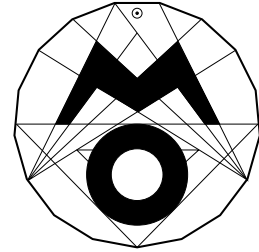


51. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 10
Aufgaben – 1. Tag



© 2011 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

511031

In einem regulären Fechtturnier tritt jeder Fechter gegen jeden anderen genau einmal zum Fechtkampf an.

- a) Weisen Sie nach, dass ein reguläres Turnier mit 6 Sportlern 9 Fechtkämpfe mehr erfordert als ein Turnier mit 4 Sportlern.
- b) Ermitteln Sie die Anzahl der Fechtkämpfe bei einem regulären Turnier mit 8 Teilnehmern.
- c) Nachdem in einem größeren Turnier alle Teilnehmer die ersten 10 Fechtkämpfe absolviert hatten, erkrankten zwei Sportler und konnten nicht mehr am Turnier teilnehmen. Im gesamten Turnier wurden (einschließlich der bisher von den Erkrankten bestrittenen Kämpfe) insgesamt 156 Fechtkämpfe ausgetragen.

Untersuchen Sie, ob der Fechtkampf zwischen den beiden erkrankten Sportlern noch stattgefunden hatte oder ob er ausgefallen war.

511032

In Sikinien hat eine Minute genau p Sekunden, wobei p eine Primzahl ist, also z. B. $p = 59$ oder $p = 61$. Das heißt, der Sekundenzeiger einer sikinischen Uhr kann auf $0, 1, \dots, p - 1$ stehen.

Auf Volksfesten wird gern das sogenannte „Sikinische Roulette“ veranstaltet: Aus der Menge werden zufällig k Frauen und $p - k$ Männer ausgesucht und in eine zufällige Reihenfolge auf die Bühne von links nach rechts gestellt. Dabei wird darauf geachtet, dass mindestens eine Frau und ein Mann auf der Bühne stehen müssen.

Sobald der Sekundenzeiger das nächste Mal auf 0 steht, geht es lebhaft zu auf der Bühne: Durch Tauschen der Plätze von benachbarten Personen soll erreicht werden, dass alle Frauen links von allen Männern stehen. Wenn also noch eine Frau direkt rechts neben einem Mann steht, können beide den Platz tauschen. Dies dauert genau eine sikinische Sekunde, und direkt danach findet der nächste Tausch statt, falls weiterhin noch eine Frau direkt rechts neben einem Mann steht. Also findet pro Sekunde genau ein Tausch auf der Bühne statt.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

Somit müssen die Teilnehmer auch blitzschnell aushandeln, welches Paar – beim Vorhandensein von mehreren Tauschmöglichkeiten – den aktuellen Tausch vollzieht.

Das Ergebnis des sikinischen Roulettes ist der Stand des Sekundenzeigers in dem Moment, da die Endposition – alle Frauen links und alle Männer rechts – erreicht ist.

Beispiel: $p = 7$, Ausgangsposition: $M - F - M - F - M - F - F$. Es gibt eine mögliche Tauschfolge, bei der nach 9 Platzwechseln die Endstellung erreicht ist. Das Ergebnis des Roulettes ist dann 2, denn nach 9 Sekunden steht der Zeiger auf der 2.

- a) Weisen Sie nach, dass sich bei beliebiger (aber fester) Anfangsposition für beliebige, aber feste p und k mit $0 < k < p$ die Anzahl der Platzwechsel auch durch eine geschickte Wahl der Tauschvorgänge nicht verringern lässt.
- b) Wir gehen davon aus, dass bei der Aufstellung der k Frauen und $p - k$ Männer auf der Bühne jede der möglichen Ausgangspositionen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gewählt wird. Weisen Sie nach, dass für beliebige, aber feste p und k mit $0 < k < p$ alle Rouletteergebnisse gleich wahrscheinlich sind.

511033

Eine schiefe vierseitige Pyramide P hat als Grundfläche ein rechtwinkliges Trapez $ABB'A'$ mit rechten Winkeln bei A und B . Die Mantelfläche besteht aus einem gleichseitigen Dreieck $A'B'C$, zwei rechtwinkligen Dreiecken $A'AC$ und $B'BC$ jeweils mit dem rechten Winkel bei A bzw. B sowie einem Dreieck ABC mit $|AB| = 4$ cm, $|AC| = 2$ cm und $|BC| = 3$ cm.

Bestimmen Sie alle unter diesen Umständen möglichen Seitenlängen von Dreieck $A'B'C$ und weisen Sie nach, dass alle anderen Seitenlängen auszuschließen sind.