

51. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 10
Aufgaben – 2. Tag



© 2011 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

511034

Finden Sie alle Paare (x, y) positiver ganzer Zahlen, für die gilt:

$$x^2 - 2x - y^2 + 46 = 0.$$

511035

Gegeben sei ein beliebiges nicht gleichschenkliges Dreieck ABC . Die Halbierende des Winkels ACB schneide die Strecke \overline{AB} in T_1 . Die Halbierende der Nebenwinkel von Winkel ACB schneide die Gerade AB in T_2 .

Beweisen Sie folgende Aussagen:

- Wenn für einen Punkt X die Gleichung $|AX| : |BX| = |AC| : |BC|$ gilt, dann liegt X auf dem Umkreis des Dreiecks T_1T_2C .
- Wenn ein Punkt X auf dem Umkreis des Dreiecks T_1T_2C liegt, dann gilt die Gleichung $|AX| : |BX| = |AC| : |BC|$.

Hinweis: Als Beweis genügt es nicht, den möglicherweise bekannten „Satz des Apollonius“ zu zitieren. Der Beweis muss selbst geführt werden.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

511036

Ob eine positive ganze Zahl ein *Palindrom* ist, d. h. dass sich ihre Zifferndarstellung nicht ändert, wenn man sie von hinten nach vorne liest, hängt natürlich vom Zahlensystem ab, in dem man die Zahl schreibt.

- a) Es werden alle positiven ganzen Zahlen betrachtet, die kleiner oder gleich 2^{20} sind.
Wie viele Palindrome gibt es darunter, wenn man sie im Zehnersystem schreibt?
Wie viele Palindrome erhält man bei einer Darstellung im Zweiersystem?
- b) Zeigen Sie, dass für jede positive ganze Zahl $b > 1$ und jede positive ganze Zahl n , die im System zur Basis b mindestens vierstellig ist, gilt: Im System zur Basis b gibt es mehr als \sqrt{n} positive ganze Zahlen kleiner oder gleich n , die Palindrome sind.

Hinweis: Im Zweiersystem werden die Zahlen als Summe von Vielfachen von Zweierpotenzen interpretiert. Beispielsweise hat die Zahl

$$45 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

im Zweiersystem die Zifferndarstellung 101101. Die Zahl 45 ist im Zweiersystem ein Palindrom, aber im Zehnersystem ist sie es nicht.