51. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 11–13
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

511334

Bestimmen Sie alle Paare (p, q) von Primzahlen derart, dass $p^q + q^p$ eine Primzahl ist.

511335

Gegeben sei eine Strecke $\overline{AD}$. Die Strecke $\overline{AD}$ sei durch zwei Punkte B und C unterteilt, und über $\overline{AD}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ seien Halbkreisbögen errichtet wie in der Skizze gezeigt.

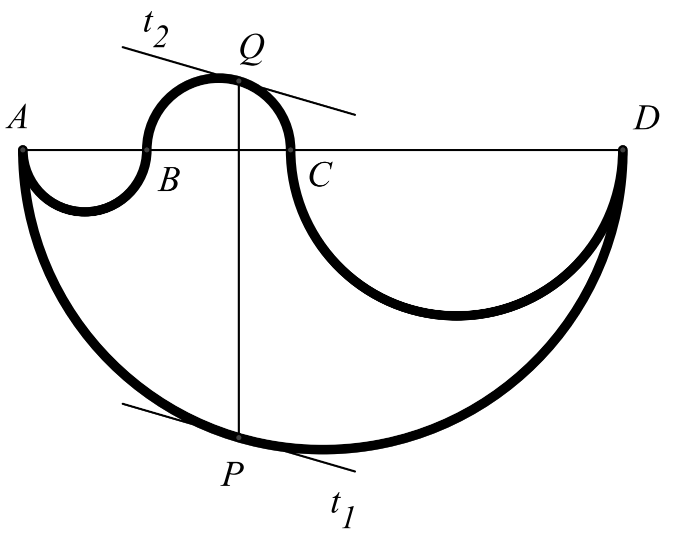

Abbildung A511335

Es seien P und Q Punkte auf den Halbkreisen über $\overline{AD}$ bzw. $\overline{BC}$ mit der Eigenschaft, dass $\overline{PQ}$ senkrecht auf $\overline{AD}$ steht und die in P und Q an die beiden Halbkreise gelegten Tangenten t_1 und t_2 zueinander parallel sind.

Man beweise, dass der Flächeninhalt F der von den Halbkreisen eingeschlossenen Fläche stets $F = \dfrac{\pi}{4}|PQ|^2$ beträgt.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

511336

Es seien x, y, z positive reelle Zahlen mit $x + y + z = 1$. Man zeige, dass dann

$$1 < \frac{x(y+z)}{y+z-yz} + \frac{y(z+x)}{z+x-zx} + \frac{z(x+y)}{x+y-xy} \leq \frac{6}{5}$$

gilt.

Können diese Schranken verbessert werden?