51. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 9
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

510944

Anita und Bodo finden eine alte Balkenwaage mit 2 Waagschalen und einen Wägesatz mit den Massestücken 1 g, 2 g, 3 g, 4 g, 5 g und 6 g. Da sie Langeweile haben, denken sie sich verschiedene Wettbewerbe aus. Folgende grundlegende Spielregeln werden vereinbart:

(1) Anita und Bodo legen abwechselnd je ein Massestück auf irgendeine der beiden Waagschalen.

(2) Anita beginnt und muss als erstes das 1-g-Massestück auflegen.

Es gibt 3 Spielrunden:

a) Im ersten Spiel wird nach dem Auflegen aller 6 Massestücke die Differenz aus den Massen der linken und der rechten Waagschale gebildet. Ist diese Differenz (in g) ungerade, gewinnt Anita. Ist die Differenz gerade, gewinnt Bodo.
Untersuchen Sie, welcher der Spielpartner einen Gewinn sicher erzwingen kann.

b) Im zweiten Spiel gewinnt Anita, wenn sie es schafft, dass am Ende des Spieles die Summe der Massen auf der linken Waagschale eine durch 3 teilbare Anzahl von Gramm ergibt. Gelingt dies nicht, gewinnt Bodo.
Untersuchen Sie, welcher der Spielpartner einen Gewinn sicher erzwingen kann.

c) Im dritten Spiel gewinnt Anita, wenn irgendwann nach einem von ihren oder Bodos Spielzügen entweder beide Waagschalen im Gleichgewicht sind oder eine der Waagschalen die doppelte Masse der anderen enthält. Anderenfalls gewinnt Bodo.
Untersuchen Sie auch hier, ob (und wenn ja, von wem) in diesem Spiel ein sicherer Sieg erzwungen werden kann.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

510945

Auf einer waagerechten Ebene E liegen drei gleich große Kugeln K_1, K_2 und K_3, die sich paarweise berühren. Die Mittelpunkte M_1, M_2 und M_3 dieser Kugeln bilden also ein gleichseitiges Dreieck.

Eine vierte Kugel K_4 berührt die Kugeln K_1, K_2, K_3 und die Ebene E. Eine weitere Kugel K_5 wird von jeder dieser vier Kugeln K_1, K_2, K_3 und K_4 von außen berührt.

In welcher Lagebeziehung steht K_5 zur Ebene E' durch M_1, M_2 und M_3?

510946

Bestimmen Sie alle Paare (a, b) positiver ganzer Zahlen, für die

$$\frac{a+1}{a} + \frac{b}{b+1} = \frac{b+2}{a+1}$$

gilt.