51. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 10
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

511041

Mario fährt in seinem Auto von Adorf nach Bedorf. Die zweite Hälfte des Weges fährt er doppelt so schnell wie die erste. Innerhalb der zweiten Hälfte der insgesamt benötigten Zeit fährt er 36 km mehr als in der ersten.

Wie weit ist es von Adorf nach Bedorf?

Hinweis: Wir nehmen an, dass Mario beide Weghälften mit jeweils konstanter Geschwindigkeit zurücklegt.

511042

Die Punkte E und F seien im Inneren eines Quadrates $ABCD$ derart gewählt, dass $AE \parallel FC$ und $|AE| = |EF| = |FC|$ gilt.

Bestimmen Sie unter diesen Bedingungen den kleinstmöglichen Wert für $|\sphericalangle EAD|$.

511043

Es sei $\mathcal{M}$ die Menge aller derjenigen achtstelligen Zahlen, deren Zifferndarstellung nur aus Nullen und Einsen besteht. Für zwei Zahlen x und y aus dieser Menge bezeichnen wir mit dem *Sternprodukt* $x * y$ diejenige Zahl, die entsteht, wenn man die Ziffern der Zahlen x und y stellenweise multipliziert. So ist zum Beispiel $01\,010\,101 * 10\,011\,001 = 00\,010\,001$.

Wir teilen nun die Zahlen aus $\mathcal{M}$ derart auf zwei nichtleere Mengen $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ auf, dass jede Zahl aus $\mathcal{M}$ in genau einer dieser beiden Mengen vorkommt. Eine Zahl x aus $\mathcal{M}$ nennen wir dann $\mathcal{M}_1$-*gut*, falls sich zu jeder Zahl y aus $\mathcal{M}$ eine Zahl z aus $\mathcal{M}_1$ mit $x * y = x * z$ finden lässt. Analog definieren wir die $\mathcal{M}_2$-guten Zahlen. Eine Zahl heißt *gut*, falls sie $\mathcal{M}_1$-gut oder $\mathcal{M}_2$-gut ist. Die Antwort auf die Frage, ob eine gegebene Zahl gut ist, hängt von der jeweiligen Wahl der Mengen $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ ab.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

a) Beweisen Sie: Unabhängig von der Wahl der Mengen $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ lässt sich immer mindestens eine gute Zahl finden.
b) Bestimmen Sie die maximal mögliche Anzahl guter Zahlen.
c) Bestimmen Sie die minimal mögliche Anzahl guter Zahlen.

Hinweis: Man beachte, dass entgegen der sonst üblichen Konvention in dieser Aufgabe achtstellige Zahlen auch mit Nullen beginnen dürfen; die Zahlen 01 001 001 und 00 000 000 sind also auch achtstellig.