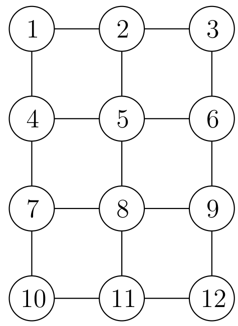
52. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

520711

Auf dem abgebildeten Spielplan spielen zwei Spieler mit zwei Steinen „Hase und Wolf". Wolf und Hase ziehen abwechselnd, wobei der Wolf beginnt. Ein Zug besteht im Übergang auf ein benachbartes Feld. Zwei verschiedene Felder sind benachbart, wenn sie durch eine gerade Linie verbunden sind.



Der Wolf gewinnt, wenn er nach spätestens 6 Zügen auf ein Feld gelangt, das der Hase gerade besetzt. Andernfalls gewinnt der Hase.

Es werden zwei Ausgangsstellungen a) und b) betrachtet:

a) Der Wolf steht auf dem Feld 1 und der Hase steht auf dem Feld 12.

b) Der Wolf steht auf dem Feld 1 und der Hase steht auf dem Feld 3.

Untersuche, in welchen der beiden Ausgangsstellungen der Wolf stets gewinnen kann, egal wie der Hase zieht.

520712

Die Abbildung A 520712 zeigt ein Quadrat $ABCD$, das aus neun deckungsgleichen Quadraten besteht.

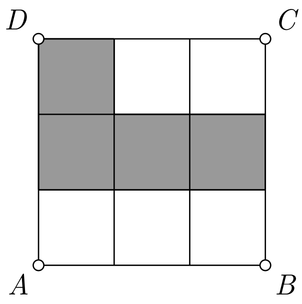


Abbildung A 520712

a) Die in Abbildung A 520712 dunkel eingefärbte Teilfläche des Quadrates $ABCD$ habe einen Flächeninhalt von $36\,\text{cm}^2$. Berechne ihren Umfang.

b) Die in Abbildung A 520712 dunkel eingefärbte Teilfläche des Quadrates $ABCD$ habe nun einen Umfang von $20\,\text{cm}$. Ermittle, wie groß ihr Flächeninhalt ist.

c) Zeige, dass es eine ganze Zahl s und eine Dunkelfärbung von einigen der 9 kleinen Teilquadrate des Quadrats $ABCD$ derart gibt, dass die Seitenlänge der kleinen Quadrate $s\,\text{cm}$, der Flächeninhalt der gesamten dunklen Fläche $28\,\text{cm}^2$ und ihr Umfang $28\,\text{cm}$ betragen.

Hinweis: Es genügt die Angabe eines Beispiels und die Begründung, dass dieses Beispiel alle Forderungen der Aufgabe erfüllt.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

520713

a) Zeichne 6 paarweise verschiedene Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 und g_6 derart, dass sie genau 6 Schnittpunkte haben und jede dieser sechs Geraden zu genau einer der anderen fünf Geraden parallel ist.

b) Untersuche, ob man 6 paarweise verschiedene Geraden derart zeichnen kann, dass sie eine ungerade Anzahl an Schnittpunkten haben und jede dieser sechs Geraden zu genau einer der anderen fünf Geraden parallel ist.

c) Gib eine Vermutung an, für welche Zahlen n man 6 paarweise verschiedene Geraden derart zeichnen kann, dass sie genau n Schnittpunkte haben. Erstelle hierzu für jede dieser möglichen Anzahlen n eine entsprechende Zeichnung.

Hinweis: Gemeinsame Schnittpunkte mehrerer Geraden werden nur einmal gezählt. Mit „paarweise verschiedenen Geraden“ ist gemeint, dass keine zwei dieser Geraden zueinander gleich sind.

520714

Professor Knobelfix hat einen Korb voller Äpfel und möchte sie einer Gruppe von Schülern schenken. Er sagt: „Wenn der Zweitjüngste einen Apfel mehr erhält als der Jüngste, der Drittjüngste wieder einen Apfel mehr erhält als der Zweitjüngste usw., dann bleibt kein Apfel übrig“. Er schlägt vor, die Äpfel genauso zu verteilen.

a) Die Schüler finden diese Aufteilung ungerecht und möchten, dass jeder von ihnen die gleiche Anzahl von ganzen Äpfeln erhalten soll.

   Zeige, dass die von den Schülern vorgeschlagene Aufteilung möglich ist, wenn die Gruppe aus 7 Schülern besteht.

b) Die Gruppe der Schüler, an die Professor Knobelfix Äpfel verschenken will, bestehe nun aus 5, 6 oder 8 Schülern. Untersuche, für welche dieser drei Anzahlen von Schülern eine Verteilung der Äpfel derart möglich ist, dass jeder Schüler die gleiche Anzahl von ganzen Äpfeln erhält.

c) Die Gruppe der Schüler, an die Professor Knobelfix Äpfel verschenken will, bestehe nun aus k Schülern. Untersuche, für welche Anzahlen k von Schülern eine Verteilung der Äpfel derart möglich ist, dass jeder Schüler die gleiche Anzahl von ganzen Äpfeln erhält.