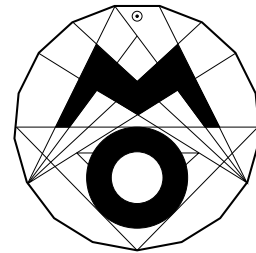


52. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 8
Aufgaben



© 2012 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
 www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

520811

In einem Garten stehen zwei runde Tische; an einem haben drei Personen Platz, an dem anderen vier. Ein Mann, zwei Frauen und vier Kinder wollen sich an die beiden Tische setzen.

- a) Bestimme die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, die sieben Personen auf die beiden Tische zu verteilen. Dabei werden die einzelnen Personen nur nach Mann, Frau und Kind unterschieden. Ihre Platzierung am Tisch soll nicht berücksichtigt werden.
- b) Bestimme die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, die sieben Personen an den beiden Tischen zu platzieren. Dabei werden die Personen wieder nur nach Mann, Frau und Kind unterschieden. Zwei Platzierungen werden als gleich angesehen, wenn sie durch Weiterrücken oder durch Umkehrung der Reihenfolge auseinander hervorgehen.

520812

Berechne die Inhalte der grauen Flächen in den Darstellungen A 520812 a, A 520812 b und A 520812 c und ermittle jeweils den Anteil an der Gesamtfläche. Es wird dabei vorausgesetzt, dass die Seitenlänge eines jeden der kleinen Quadrate des Rasters 1 cm beträgt.

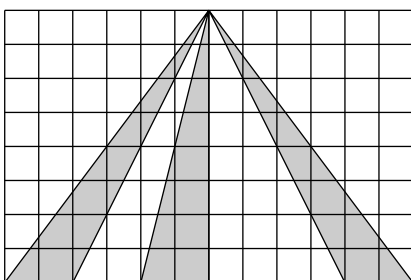


Abbildung A 520812 a

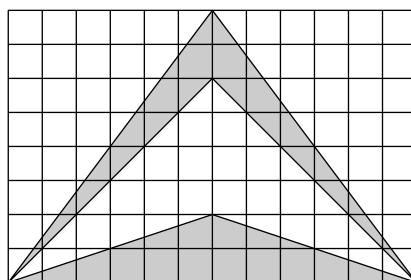


Abbildung A 520812 b

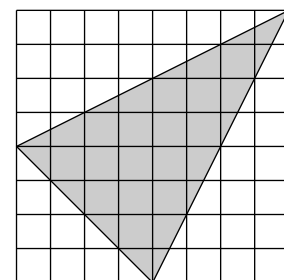


Abbildung A 520812 c

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

520813

Ermittle alle Paare (a, b) aus positiven ganzen Zahlen, die folgende Bedingungen erfüllen:

- (1) Die Summe aus a und b beträgt 324.
- (2) Der größte gemeinsame Teiler von a und b ist 36.
- (3) Die Zahl a ist größer als die Zahl b .
- (4) Die Zahl a ist nicht größer als das Doppelte von b .

Bemerkung: Der größte gemeinsame Teiler von a und b kann durch $\text{ggT}(a, b)$ bezeichnet werden.

520814

Mit Zirkel und Lineal sind Dreiecke ABC zu konstruieren, welche folgende Bedingungen erfüllen:

- (1) Die Seite \overline{AB} hat die Länge c .
 - (2) Die Seite \overline{AC} hat die Länge b .
 - (3) Die Strecke \overline{CH} ist eine Höhe des Dreiecks ABC und hat die Länge h_c .
- a) Beschreibe die Konstruktion eines solchen Dreiecks. Führe die Konstruktion für $b = 6$ cm, $c = 4$ cm und $h_c = 5$ cm durch.
 - b) Überprüfe, ob die beschriebene Konstruktion auch durchführbar ist, wenn $b = 5$ cm, $c = 4$ cm und $h_c = 6$ cm gelten.
 - c) Untersuche die Durchführbarkeit der Konstruktion in Abhängigkeit von den Längen b , c und h_c .
 - d) Beweise: Wenn ein Dreieck wie beschrieben konstruiert wird, dann erfüllt es die gestellten Bedingungen.

Mathematische Grundlagen: Die Konstruktion mit Zirkel und Lineal ist in der Geometrie die klassische Methode, um geometrische Figuren aus vorgegebenen Größen zu zeichnen. Zirkel und Lineal sind dabei als ideale Werkzeuge zu betrachten: Mit diesen beiden idealen Geräten können aber (im Unterschied zu den realen Geräten) folgende Elementarkonstruktionen exakt und unbegrenzt durchgeführt werden: Konstruktion der Geraden durch zwei verschiedene Punkte, Konstruktion des Schnittpunktes zweier nichtparalleler Geraden, Konstruktion eines Kreises durch einen Punkt mit vorgegebenem Mittelpunkt, Konstruktion der Schnittpunkte eines Kreises mit Geraden, Konstruktion der Schnittpunkte zweier Kreise. Der ideale Zirkel hat keine Skalierung zur Einstellung eines bestimmten Radius. Das ideale Lineal hat keine Markierungen und es sind auch keine Markierungen auf ihm auftragbar. Man kann mit dem Lineal also keine Strecken abmessen und auch keine Längen abtragen. Weitere Instrumente wie zum Beispiel ein Geo-Dreieck sind nicht zugelassen.

Aus den Elementarkonstruktionen lässt sich eine Reihe von Grundkonstruktionen zusammensetzen, wie die Konstruktion der Mittelsenkrechten zu einer Strecke, der Winkelhalbierenden zu einem Winkel, der zu einer Geraden senkrechten Geraden durch einen Punkt. Im Internet findest du mit dem Stichwort „Konstruktion mit Zirkel und Lineal“ verschiedene Seiten, auf denen die Ausführung von Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal beschrieben wird.

Bei einigen Konstruktionsaufgaben werden gewisse Streckenlängen, Abstände und Winkelgrößen durch Angabe von Maßen vorgegeben. Nur diese Maße dürfen dann durch Abmessen mit (skalierstem) Lineal bzw. Winkelmesser einmalig in die Konstruktion übernommen werden.