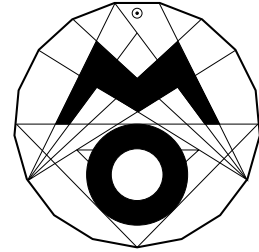


52. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 10
Aufgaben



© 2012 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

521021

Die natürlichen Zahlen von 1 bis 6 werden auf die Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks so verteilt, dass auf jedem Eckpunkt genau eine Zahl liegt. Dann wird die Zahl jedes Eckpunkts mit der Zahl des linken und rechten Nachbarpunkts multipliziert. So entstehen sechs sogenannte *Nachbarschaftsprodukte* mit je drei Faktoren.

Beispiel: In der Reihenfolge $\dots, 2, 1, 3, 4, \dots$ bilden 2, 1 und 3 das Nachbarschaftsprodukt 6, und die Zahlen 1, 3 und 4 bilden das Nachbarschaftsprodukt 12.

- a) Die Zahlen 1 bis 6 werden aufsteigend im Uhrzeigersinn angeordnet. Geben Sie die Summe der sechs Nachbarschaftsprodukte an.
- b) Finden Sie eine Anordnung, bei der möglichst wenige voneinander verschiedene Nachbarschaftsprodukte entstehen. Weisen Sie nach, dass es keine Anordnungen mit einer noch geringeren Anzahl geben kann.
- c) Ermitteln Sie die Anzahl der voneinander verschiedenen Anordnungen, bei denen die Summe der sechs Nachbarschaftsprodukte eine ungerade Zahl ergibt.
Dabei zählen zwei Anordnungen als nicht verschieden, wenn sie durch Drehung und/oder Spiegelung des Sechsecks auseinander hervorgehen.

521022

Velo Flitzped macht eine Radtour. Zum Aufwärmen fährt er auf ebener Straße mit 20 km/h, dann mit 15 km/h bergauf, bis ihm die Puste ausgeht. Danach fährt er dieselbe Strecke zurück, bergab sehr vorsichtig mit 30 km/h und in der Ebene zunächst wieder mit 20 km/h. In den letzten 12 Minuten dreht er aber noch einmal auf und kommt in ihnen auf einen Schnitt von 30 km/h.

Insgesamt ist er 5 Stunden unterwegs.

Ermitteln Sie die Gesamtlänge der beschriebenen Radtour.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

521023

Wenn man eine nichtnegative ganze Zahl mit sich selbst multipliziert, erhält man eine Quadratzahl. In einem mathematischen Wettbewerb zwischen den Spielern A und B geht es um das Erreichen von Quadratzahlen. Dazu steht beiden Spielern gemeinsam eine Liste mit den natürlichen Zahlen 1 bis 20 zur Verfügung. Die Startzahl des Spiels ist 210. Beide Spieler ziehen abwechselnd, wobei Spieler A den ersten Zug hat. Er darf sich eine der Zahlen von 1 bis 20 aussuchen und diese von der Startzahl subtrahieren. Wer danach am Zug ist, darf vom bis dahin erreichten Ergebnis wiederum eine der noch nicht verwendeten Zahlen von 1 bis 20 subtrahieren.

Wer mit seiner aktuellen Subtraktion auf eine Quadratzahl kommt, erhält dafür jeweils einen Punkt. Nachdem beide Spieler abwechselnd je 10 Zahlen subtrahiert haben, ist das Spiel zu Ende.

- Untersuchen Sie, ob der Spieler A „zu null“ gewinnen kann, d. h. ob B null Punkte haben kann.
- Untersuchen Sie, ob ein Endstand von $7 : 7$ Punkten möglich ist.
- A wettet mit B : „Ich verzichte darauf, im ersten Zug die Quadratzahl 196 einzunehmen. Trotzdem wirst du weder die Quadratzahl 196 noch die Quadratzahl 169 einnehmen können.“
Untersuchen Sie, ob A diese Wette bei intelligentem Spiel von B gewinnen kann.

521024

Die Seite \overline{AB} eines Rechtecks $ABCD$ ist gleichzeitig Durchmesser eines Kreises k mit dem Mittelpunkt M . Der Kreis k schneidet die Seite \overline{CD} in den Punkten E und F (E liege dabei zwischen D und F).

- Die Strecken \overline{MF} und \overline{BE} schneiden sich in S . Drücken Sie die Winkelgröße $\delta = |\sphericalangle BSF|$ allgemein und vollständig durch die Winkelgröße $\varepsilon = |\sphericalangle FME|$ aus.
- Beweisen Sie: Wenn für das Seitenverhältnis $|AB| : |AD| = 3 : \sqrt{2}$ gilt, dann teilen E und F die Strecke \overline{CD} in drei gleiche Teile.

