

52. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 11-12
Aufgaben



© 2012 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

521221

Man bestimme alle reellen Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} &= 4, \\ (x+y)^2 + (x-y)^2 &= 82.\end{aligned}$$

521222

Man bestimme alle Primzahlen p mit der Eigenschaft, dass $7p + 1$ eine Kubikzahl ist.

521223

Die Strecke \overline{AB} sei Durchmesser eines Kreises k . Der Punkt C sei ein innerer Punkt der Strecke \overline{AB} . Die Gerade g stehe im Punkt C senkrecht auf \overline{AB} . Der Punkt D sei ein Schnittpunkt der Geraden g mit dem Kreis k . Der Kreis k_1 berühre die Gerade g im Punkt D und gehe durch den Punkt A .

Man zeige, dass die Kreise k und k_1 gleiche Radien haben.

521224

Es seien a, b, c und d vier nichtnegative reelle Zahlen mit $a + b + c + d = 1$. Man zeige, dass die sechs Zahlen

$$\sqrt{a} + \sqrt{b}, \sqrt{a} + \sqrt{c}, \sqrt{a} + \sqrt{d}, \sqrt{b} + \sqrt{c}, \sqrt{b} + \sqrt{d} \text{ und } \sqrt{c} + \sqrt{d}$$

nicht sämtlich kleiner als 1 sein können.