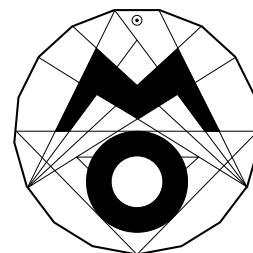


52. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklasse 6
Aufgaben – 1. Tag



© 2012 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

520631

Eine natürliche Zahl kann die Eigenschaft haben, dass sie durch ihre Quersumme teilbar ist. Ein Beispiel ist 12.

- Gib zwei zweistellige natürliche Zahlen an, deren größter gemeinsamer Teiler 1 ist und die jeweils durch ihre Quersumme teilbar sind.
- Untersuche, ob alle durch 9 teilbaren zweistelligen natürlichen Zahlen durch ihre Quersumme teilbar sind.
- Begründe durch allgemeine Feststellungen, dass alle durch 10 teilbaren zweistelligen natürlichen Zahlen durch ihre Quersumme teilbar sind.

520632

Onkel Otto mag es auch bei Geburtstagsgeschenken gern mathematisch. Zum Geburtstag von Nichte Carla kommt er mit sieben gleich aussehenden Umschlägen und erklärt:

Pass mal auf. In drei dieser Umschläge befindet sich ein 5-Euro-Schein, in zwei Umschlägen ein 10-Euro-Schein, und die beiden anderen enthalten jeweils einen 20-Euro-Schein.

Du darfst drei Umschläge ziehen. Nun habe ich drei Fragen:

- Welche Geldbeträge könntest du auf diese Weise bekommen?
- Finde heraus, ob es dabei für dich wahrscheinlicher ist, 25 € oder 20 € zu erhalten.
- Wie viele Möglichkeiten für das Ziehen von drei vorhandenen Geldbeträgen hast du, um mehr als 35 € zu ziehen?

Hinweis: Eine Möglichkeit ist (10 €, 20 €, 20 €), eine andere (20 €, 10 €, 20 €).

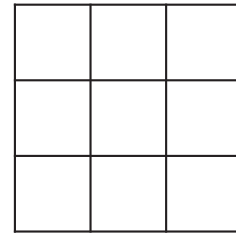
Bemerkung: Onkel Otto ist aber ein lieber Onkel. Er hat Carla das restliche Geld auf ihr Sparkonto eingezahlt.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

520633

Clara beginnt mit einem Quadrat, wir nennen dies „die Figur der Stufe 0“, kurz Figur (0).

Sie zerlegt dieses Quadrat in neun gleich große Quadrate, dies ist „die Figur der Stufe 1“ oder Figur (1) (siehe nebenstehende Abbildung).



Jetzt sagt sie sich: Ich will nun immer wieder jedes Quadrat, das genau einen Eckpunkt mit dem ursprünglichen Quadrat aus Figur (0) gemeinsam hat, in neun gleich große Teilquadrate zerlegen.

Clara zählt jetzt immer alle diejenigen Quadrate, die in ihrem Inneren keine weiteren Quadrate enthalten, und hält diese Anzahl mit dem Namen $A(n)$ fest, wenn sie n Zerlegungsschritte gemacht hat. Bei der Figur (1) zählt sie also 9 Quadrate und erhält $A(1) = 9$.

- a) Wie viele Quadrate zählt Clara bei Figur (2)?
- b) Was erhält Clara für $A(5)$?
- c) Finde eine Vorschrift (oder Formel) für die Anzahl $A(n)$ in der Stufe n ($n \geq 1$) und begründe sie.
- d) Berechne nun $A(10)$.