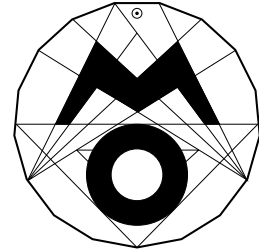


52. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklasse 10
Aufgaben – 1. Tag



© 2012 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

521031

Über ein Wettschwimmen mit sechs Teilnehmern A, B, C, X, Y und Z, die alle unterschiedliche Zeiten erreichten, sind sehr widersprüchliche Informationen in Umlauf:

- (1) X wurde nicht Fünfter oder Y wurde Sechster.
- (2) X wurde Fünfter und Z wurde Dritter.
- (3) X wurde Fünfter und Y wurde Vierter.
- (4) Z wurde Dritter oder Y wurde Zweiter.

Untersuchen Sie, ob es möglich ist, dass

- a) alle vier,
- b) genau zwei,

dieser Aussagen (1) bis (4) gleichzeitig zutreffen.

- c) Bei der Einlaufreihenfolge C, Z, B, Y, X, A ist genau eine der vier Aussagen wahr, nämlich (3). Bestimmen Sie die Anzahl der möglichen Einlaufreihenfolgen, für die *keine* der vier Aussagen wahr ist.

521032

Ein Becher Fruchtquark ist an der Oberseite durch ein quadratisches Stück $ABCD$ aus Aluminiumfolie mit der Seitenlänge 10 cm verschlossen. Zum Öffnen des Bechers wird diese Folie ganz oder teilweise flach abgezogen, wobei die Grenze zwischen dem abgezogenen und dem nicht abgezogenen Teil immer auf einer Senkrechten zur Zugrichtung liegt und die Zugrichtung sich nicht ändert. Einerseits verkleinert sich dadurch der sichtbare Teil der ursprünglichen Folienoberseite, andererseits vergrößert sich der Anteil der bisherigen Unterseite, die durch das teilweise Aufziehen nach und nach sichtbar wird. Beginnt man beispielsweise, die Folie wie in der Skizze von B aus abzuziehen, besteht die kurz nach Beginn des Abziehens sichtbare Folienfläche (in der Abbildung A 521032 grau unterlegt) teilweise aus der Ober- und teilweise aus der umgewendeten Unterseite der Folie.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

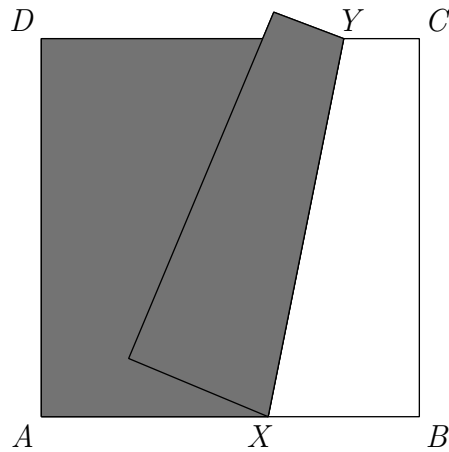


Abbildung A 521032

- a) Die Folie werde innerhalb einer Sekunde von der Seite \overline{BC} aus senkrecht zu dieser mit konstanter Geschwindigkeit abgezogen. Dabei nimmt der Inhalt der sichtbaren Foliensfläche erst ab und dann wieder zu.
Stellen Sie den Inhalt der sichtbaren Foliensfläche in Abhängigkeit von der Zeit t (in Sekunden) als Funktion $F(t)$ (in cm^2) in einem Koordinatensystem für das Intervall $0 \leq t \leq 1$ grafisch dar. Ein Nachweis, dass die von Ihnen skizzierte Funktion auch tatsächlich die richtige ist, wird hier nicht verlangt.
- b) Diesmal wird die Folie mit gleichbleibender Geschwindigkeit von B aus diagonal in Richtung auf D abgezogen. Bis zum vollständigen Abreißen dauert es 6 Sekunden.
Ermitteln Sie, wann der Inhalt F der sichtbaren Fläche genau $\frac{7}{9}$ des Ausgangsflächeninhalts betragen hat.
- c) Die Folie wird diesmal von B aus schräg abgezogen. Dabei zieht man die zu B gehörige Folienecke so weit, bis sie auf dem Mittelpunkt der Seite \overline{AD} gelandet ist.
Berechnen Sie für diesen Fall den Inhalt F der dann sichtbaren Foliensfläche.

521033

- a) Finden Sie für jede Primzahl p zwei wesentlich verschiedene Darstellungen des Bruches $\frac{p^2-1}{p^2}$ als Summe zweier vollständig gekürzter Brüche mit gleichem Zähler und verschiedenen Nennern.
- b) Beweisen Sie, dass sich nur genau zwei wesentlich verschiedene Darstellungen finden lassen.

Hinweis: Ein *vollständig gekürzter Bruch* ist die eindeutige Darstellung $r = \frac{p}{q}$ der positiven rationalen Zahl r mit positiven teilerfremden ganzen Zahlen p und q . Zwei Summendarstellungen heißen *wesentlich verschieden*, wenn sie nicht durch Vertauschen der Summanden ineinander übergehen.