52. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklasse 10
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

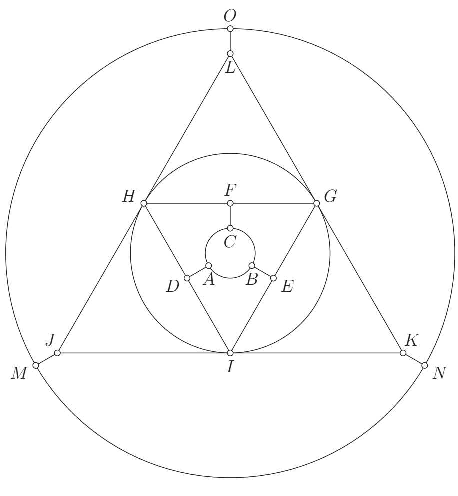
521034

a) S sei die Summe der Quadrate von drei nicht notwendig verschiedenen positiven ganzen Zahlen, deren Summe gleich 2013 ist. Bestimmen Sie den kleinsten Wert, den S annehmen kann.

b) S sei nun die Summe der Quadrate von fünf nicht notwendig verschiedenen positiven ganzen Zahlen, deren Summe gleich 2013 ist. Bestimmen Sie auch in diesem Fall den kleinsten Wert, den S annehmen kann.

521035

In dem abgebildeten Ameisenstraßenplan sind 15 Orte, die mit den Buchstaben A bis O bezeichnet sind, sowie 27 Ameisenstraßen zwischen diesen Orten eingezeichnet. Eine handlungsreisende Ameise möchte startend auf einer beliebigen Ameisenstraße sämtliche Orte von A bis O jeweils genau einmal besuchen (in beliebiger Reihenfolge). Ihre Reise soll dabei an genau demjenigen Punkt enden, an dem sie begonnen hat.



Zeigen Sie, dass die Ameise dies nicht erreichen kann, wenn sie nur entlang der bestehenden Ameisenstraßen des gezeigten Planes geht!

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

521036

Gegeben seien zwei Punkte A und B auf einem Kreis k. Auf k werde ein weiterer von A und B verschiedener Punkt C gewählt. Wir betrachten den aus den Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{CB}$ bestehenden Streckenzug und bezeichnen mit X denjenigen Punkt, welcher diesen Streckenzug in zwei Teile gleicher Länge zerlegt.

Bestimmen Sie den geometrischen Ort der Punkte X, wenn C die von A und B verschiedenen Punkte auf dem Kreis k durchläuft.

Hinweis: Der *geometrische Ort der Punkte* X bezeichnet hier die Menge all dieser Punkte bei allen möglichen Wahlen des Punktes C.