52. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklassen 11 und 12
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

521231

Man ermittle für jede reelle Zahl a alle reellen Zahlen x, die die Gleichung

$$2\,|x+a| - |x-2a| = 3a$$

erfüllen.

521232

Zwei Kreise k_1 und k_2 schneiden sich in den Punkten P und Q. Eine Gerade schneidet den Kreis k_1 in den Punkten A und C sowie den Kreis k_2 in den Punkten B und D, wobei der Punkt B zwischen den Punkten A und C sowie der Punkt C zwischen den Punkten B und D liegt.

Man beweise: Wenn die Strecke $\overline{PC}$ eine Innenwinkelhalbierende des Dreiecks DPB ist, dann ist die Strecke $\overline{QA}$ eine Außenwinkelhalbierende des Dreiecks BQD.

521233

Gegeben seien n nichtnegative reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ mit $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$, die die Ungleichungen

$$x_1^2 + \cdots + x_m^2 \geq m^2 \qquad \text{für alle } 1 \leq m \leq n$$

erfüllen. Man zeige, dass

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq \sqrt{1} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{2n-1}$$

gilt.