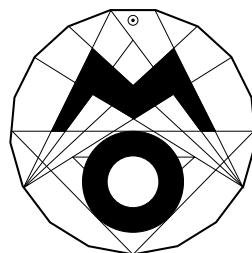


**52. Mathematik-Olympiade**  
**3. Stufe (Landesrunde)**  
**Olympiadeklassen 11 und 12**  
**Aufgaben – 1. Tag**



© 2012 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*  
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

521231

Man ermittle für jede reelle Zahl  $a$  alle reellen Zahlen  $x$ , die die Gleichung

$$2|x + a| - |x - 2a| = 3a$$

erfüllen.

521232

Zwei Kreise  $k_1$  und  $k_2$  schneiden sich in den Punkten  $P$  und  $Q$ . Eine Gerade schneidet den Kreis  $k_1$  in den Punkten  $A$  und  $C$  sowie den Kreis  $k_2$  in den Punkten  $B$  und  $D$ , wobei der Punkt  $B$  zwischen den Punkten  $A$  und  $C$  sowie der Punkt  $C$  zwischen den Punkten  $B$  und  $D$  liegt.

Man beweise: Wenn die Strecke  $\overline{PC}$  eine Innenwinkelhalbierende des Dreiecks  $DPB$  ist, dann ist die Strecke  $\overline{QA}$  eine Außenwinkelhalbierende des Dreiecks  $BQD$ .

521233

Gegeben seien  $n$  nichtnegative reelle Zahlen  $x_1, \dots, x_n$  mit  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ , die die Ungleichungen

$$x_1^2 + \dots + x_m^2 \geq m^2 \quad \text{für alle } 1 \leq m \leq n$$

erfüllen. Man zeige, dass

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq \sqrt{1} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{2n-1}$$

gilt.