

52. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 8
Aufgaben – 1. Tag



© 2013 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

520841

Albert berichtet von seiner ersten Begegnung mit dem Mathematiker Bodo: „Am Neujahrstag des Jahres 1953 lernte ich während einer Bahnfahrt Bodo kennen. Im Laufe des Gesprächs kamen wir auf unser Alter zu sprechen. Ich sagte ihm, wenn er die Quersumme meines (vierstellig geschriebenen) Geburtsjahres bildet, dann würde er mein Alter erhalten.“

Albert ergänzt: „Nach einigem Überlegen gratulierte mir Bodo zum Geburtstag, den ich tatsächlich an diesem Tag hatte.“

Weise nach, dass man tatsächlich allein aus Alberts Angaben in seinen ersten drei Sätzen seinen Geburtstag eindeutig bestimmen kann, und ermittle, wie alt er heute ist.

Hinweis: Das Alter wird als ganzzahlig betrachtet, wobei mit Beginn des Geburtstages das entsprechende Lebensjahr vollendet wird.

520842

Wollten sich 33 Schüler einer Klasse zusammen mit ihrem Mathematiklehrer nebeneinander in einer Reihe aufstellen, dann gibt es dafür $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 32 \cdot 33 \cdot 34 =)$ $34!$ (lies 34 Fakultät) verschiedene Anordnungen. Das ist eine sehr große Zahl. Christine hat sie schriftlich ausgerechnet, aber beim Falten des Zettels sind vier Ziffern unleserlich geworden. Nun würde sie gern wissen, wie die vier Ziffern lauten, ohne das gesamte Produkt noch einmal ausrechnen zu müssen. Die unleserlichen Ziffern seien mit a , b , c und d bezeichnet. Die ausgerechnete Zahl lautet dann

$$34! = 295\,232\,799\,cd9\,604\,140\,847\,618\,609\,643\,5ab\,000\,000.$$

Ermittle die Ziffern a , b , c und d , ohne die Zahl $34!$ durch Ausmultiplizieren zu berechnen.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

520843

Mit Zirkel und Lineal ist ein Viereck $ABCD$ zu konstruieren, das folgende Bedingungen erfüllt:

- (1) $ABCD$ ist ein Rhombus.
 - (2) Der Winkel BAD hat die Größe 65° .
 - (3) Die Summe der Längen der beiden Diagonalen von $ABCD$ beträgt 10 cm.
- a) Fertige eine Konstruktionszeichnung an.
 - b) Beschreibe deine Konstruktion.
 - c) Beweise: Wenn ein Viereck wie beschrieben konstruiert wird, dann erfüllt es die gestellten Bedingungen.

Hinweis: Ein anderer Name für Rhombus ist Raute.

Die hier durch Angabe von Maßen vorgegebenen Streckenlängen und Winkelgrößen dürfen durch Abmessen mit (skaliertem) Lineal bzw. Winkelmesser einmalig in die Konstruktion übernommen werden.