52. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 9
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

520944

Zeigen Sie, dass $3^m + 3^n + 1$ für positive ganze Zahlen m, n niemals das Quadrat einer ganzen Zahl sein kann.

520945

In einem Zahlenquiz bekommt jeder der 1 500 Teilnehmer einen Zettel, auf den er eine oder mehrere verschiedene natürliche Zahlen schreibt und den er dann vorzeigt. Der Quizmaster hat die Aufgabe, auf einen eigenen großen Zettel derart einige natürliche Zahlen zu schreiben, dass folgende Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind:

(1) Auf dem Zettel jedes Teilnehmers steht eine Zahl, die auch auf dem Zettel des Quizmasters zu finden ist.

(2) Es gibt mindestens einen Teilnehmer, dessen kleinste aufgeschriebene Zahl zugleich die kleinste Zahl auf dem Zettel des Quizmasters ist, und diese Zahl ist die einzige Zahl, die auf beiden Zetteln steht.

Zeigen Sie, dass der Quizmaster dies immer erreichen kann!

520946

Gegeben ist ein spitzwinkliges Dreieck ABC. Bestimmen Sie die Menge aller derjenigen Punkte P im Inneren des Dreiecks ABC, für die es einen Punkt X auf der Geraden BC und einen Punkt Y auf der Geraden CA derart gibt, dass folgende drei Bedingungen simultan erfüllt sind:

(1) Der Punkt X ist vom Punkt C verschieden.

(2) Die Gerade XY ist parallel zur Geraden AB.

(3) Die Winkel $\sphericalangle XPC$ und $\sphericalangle CPY$ sind gleich groß.

Hinweis: Zwei Geraden sind auch dann parallel, wenn sie zusammenfallen.